Elfolyó Tér: Hálófeldolgozás & Alkalmazásai

Dr. Fábián Gábor, adjunktus @ ELTE-IK
Numerikus Analízis Tanszék
Eötvös Collegium TermTud Tábor 2025. 07. 23.

Tartalomjegyzék

01

Mi van ott bent?

A testek, felületek matematikai értelmezése.

02

Ki aludt az ágyacskámban?

Hálók és beágyazásuk a síkba.

03

Behálózva

Jel- kép- és hálófeldolgozás.

04

Elfolyó tér

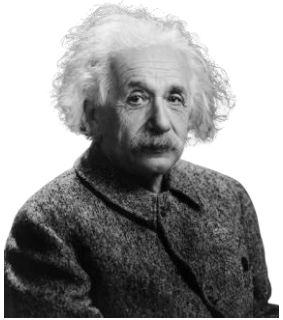
Hálók közötti átmenetek.

A Címről

La persistencia de la memoria
Salvador Dalí
1931

Idegenvezetőink

Gauss



Einstein

Neumann

Testek

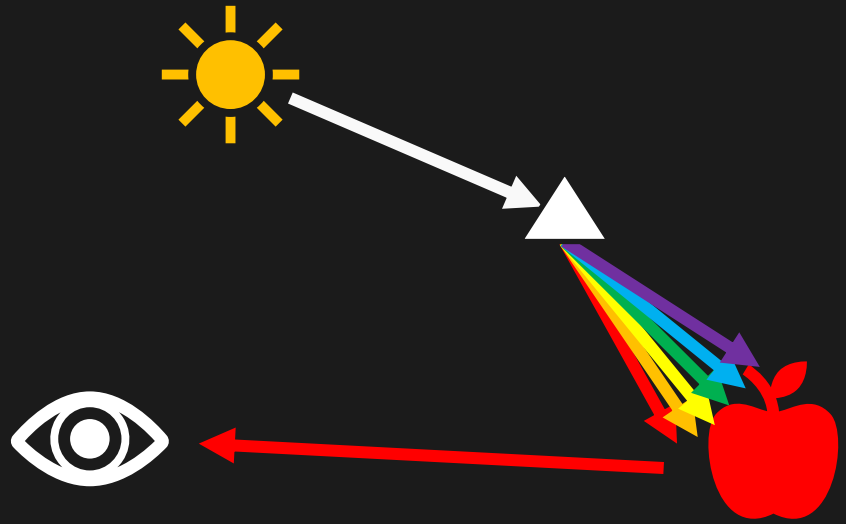
- 3D objektumok
- Van határuk
- A határuk felületszerű

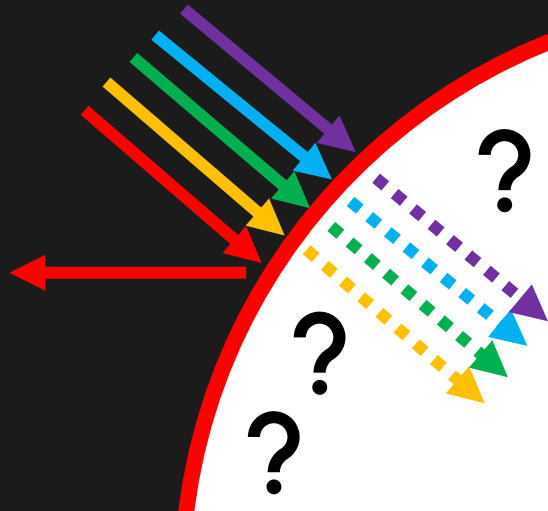
- 3D tér részhalmazai
- Korlátos halmazok
- Határuk 2D-szerű
- 3-részre bontják a 3D teret!

Hogyan jellemezhető a (geometriai) test?

„A geometriában **test** alatt olyan háromdimenziós alakzatokat értünk, amelyek határfelülettel jellemezhetőek.”
Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Test_(geometria)

ÉRZÉKELÉSÜNK

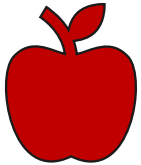




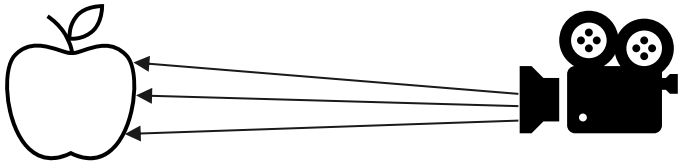
Mi van ott bent?

Van egyáltalán bent?

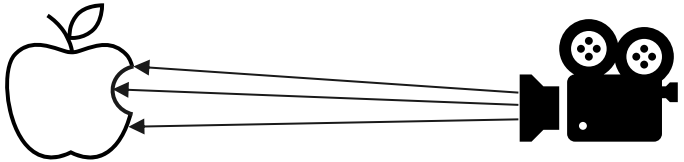
Test



Felület



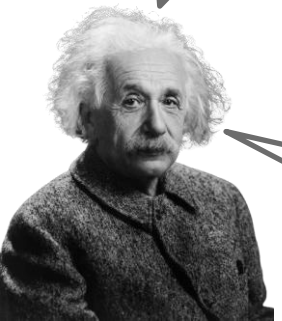
Felület



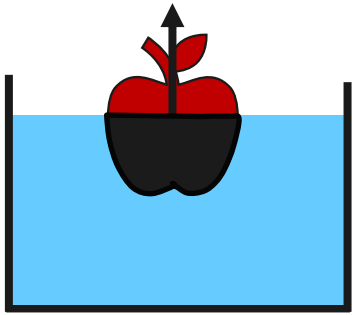
Nem mindegy, mi van ott bent?

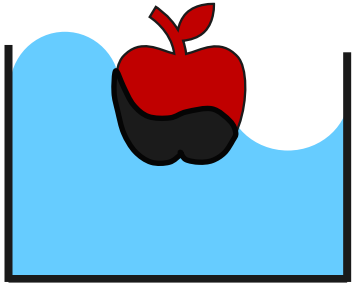
$$F_{fel} = \rho \cdot g \cdot V$$

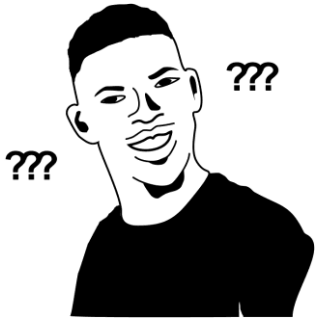
Hogy szól az Arkhimédész-törvény?



„Minden vízbe mártott test a súlyából annyit veszt, amennyi az általa kiszorított víz súlya”



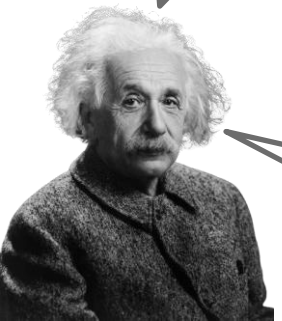




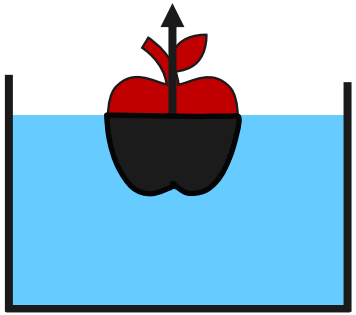
Nem mindegy, mi van ott bent?

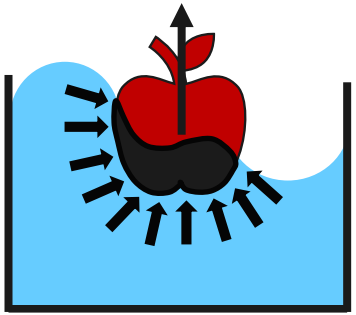
$$F_{fel} = \rho \cdot g \cdot V$$

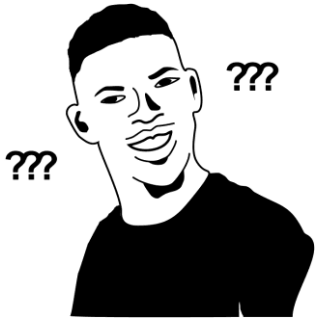
Hogy szól az Arkhimédész-törvény?



„Minden vízbe mártott test a súlyából annyit veszt, amennyi az általa kiszorított víz súlya”

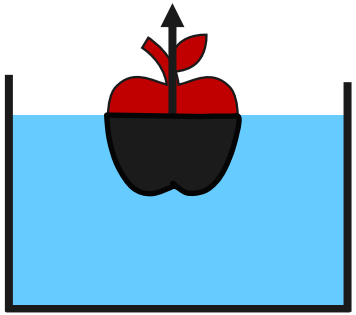


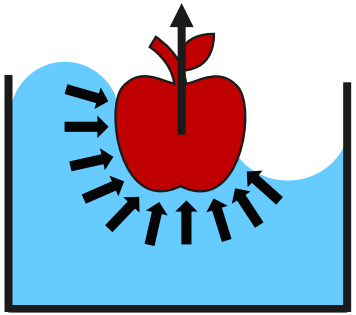




Nem mindegy, mi van ott bent?

$$F_{fel} = \rho \cdot g \cdot V$$





Nincs ebben semmi meglepő.

Már rég tisztáztam, hogy mi a kapcsolat a **felületen** és a **térfogaton** vett összegzés között…

Függvények

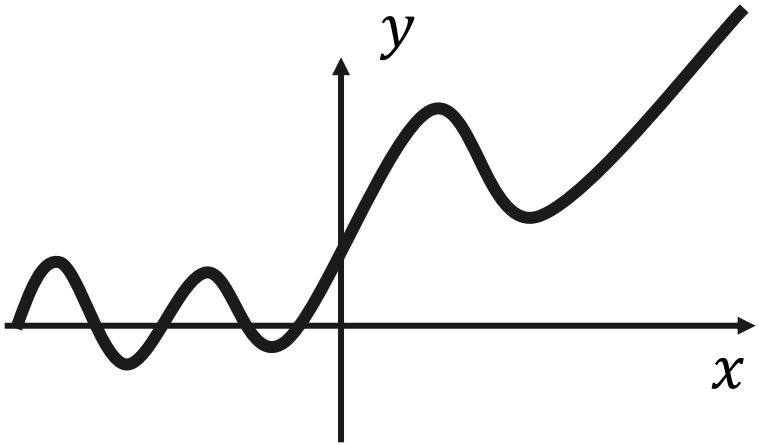
Értelmezési tartomány

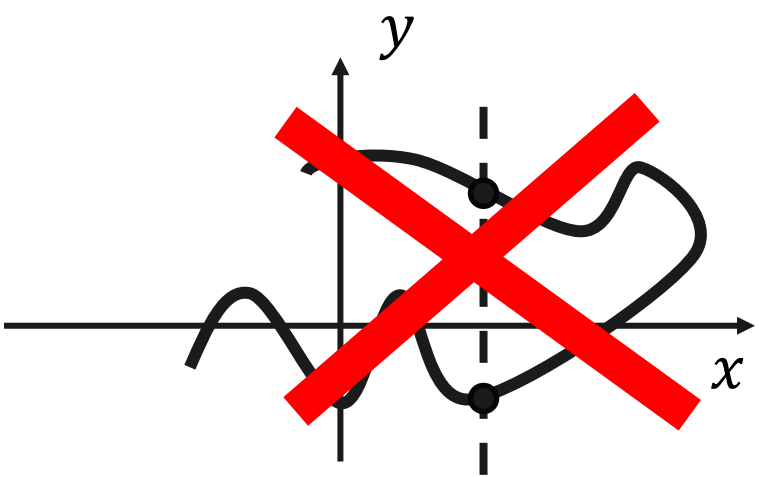
x

f

Értékkészlet

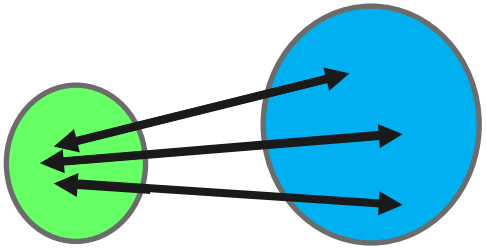
$y = f(x)$

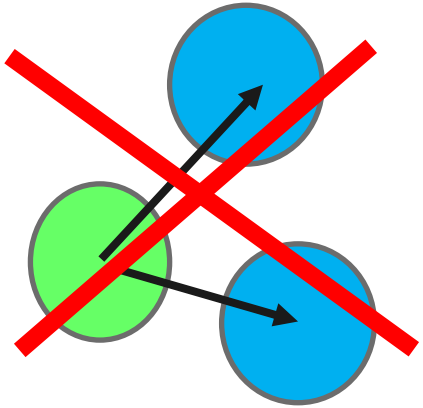


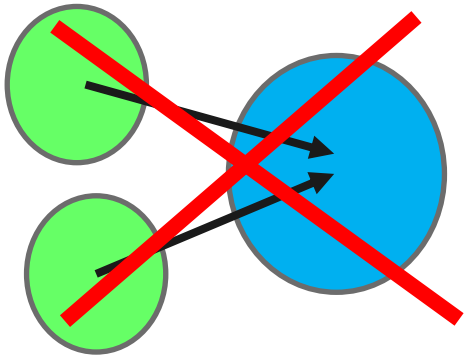


„Szép” függvények

1. Minden lehetséges kimenethez tartozik bemenet.
2. Különböző bemenetekhez különböző kimenetek tartoznak.
3. Közeli bemenetekhez közeli kimenetek tartoznak.
4. Közeli kimenetekhez közeli bemenetek tartoznak.

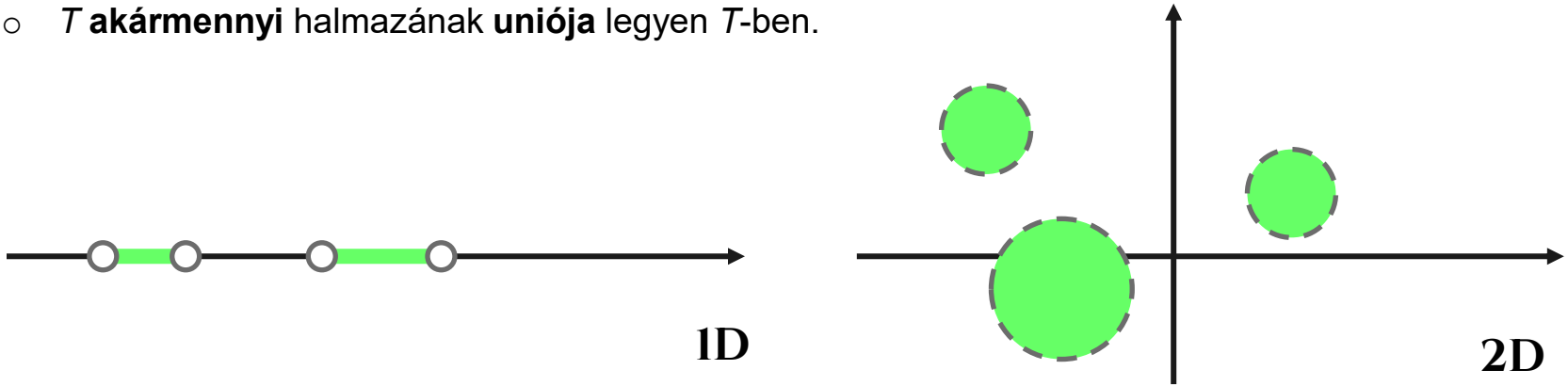






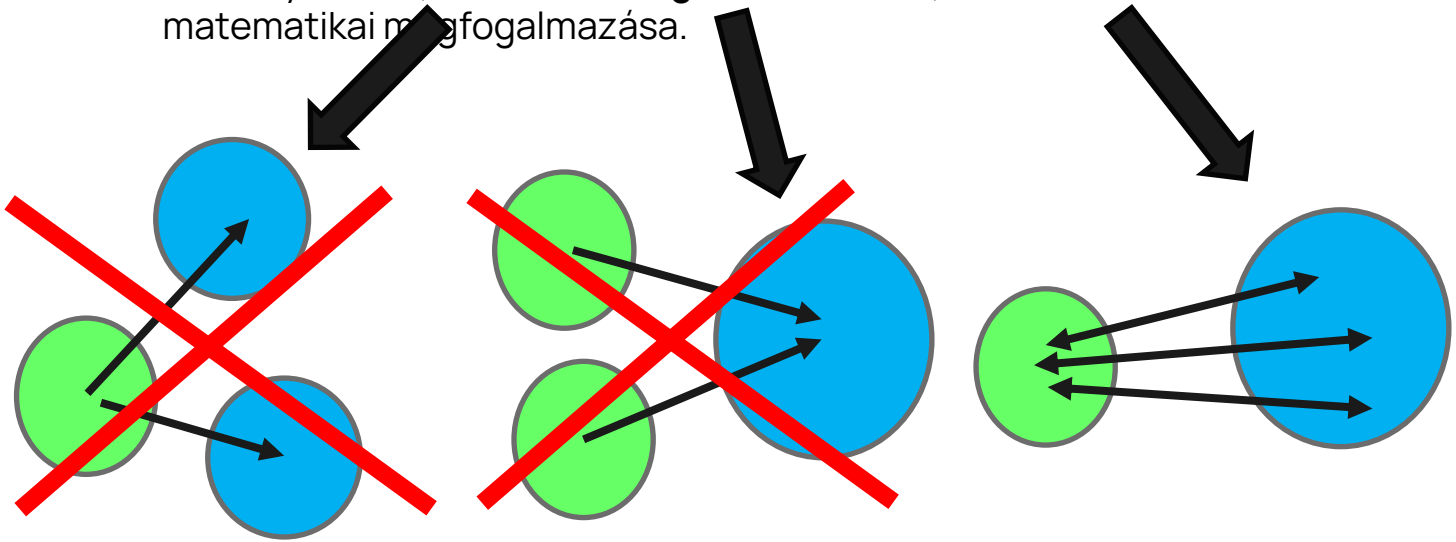
(Topologikus) Tér

- Értelmes a tér pontjainak a **környezetéről** beszélni.
- Legyen egy tetszőleges *H* halmazunk, valamint egy *T* halmazunk, amely a *H* részhalmazainak halmazait tartalmazza (valamennyit).
- Legyen az **üres halmaz és *H*** része a *T*-nek.
- *T* **véges sok** halmazának **metszete** legyen *T*-ben.
- *T* **akármennyi** halmazának **uniója** legyen *T*-ben.

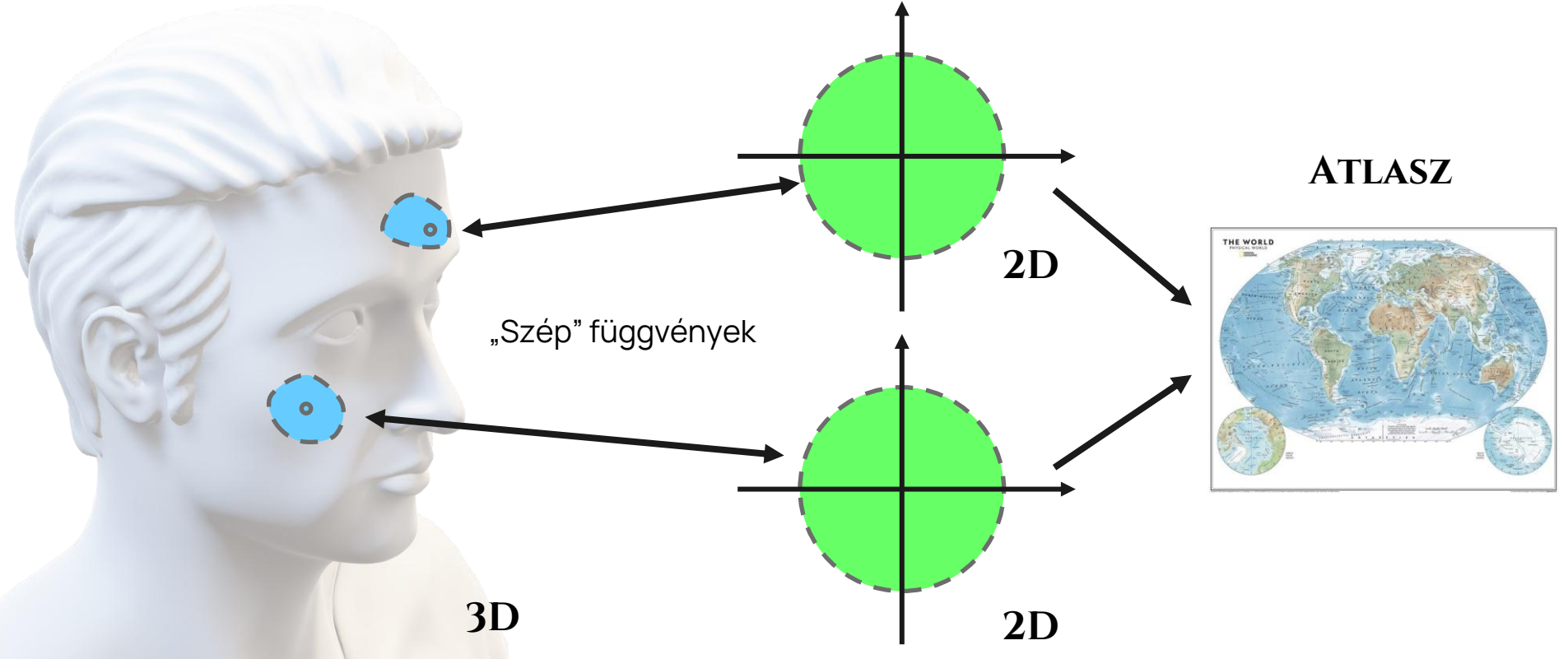


Egyforma terek

- Topologiailag megkülönböztethetetlen két tér, ha van olyan „szép” függvény, amely az egyiket a másikra képezi.
- Ez a folytonos (**szakítás** és **ragasztás** nélküli) **deformáció** matematikai megfogalmazása.

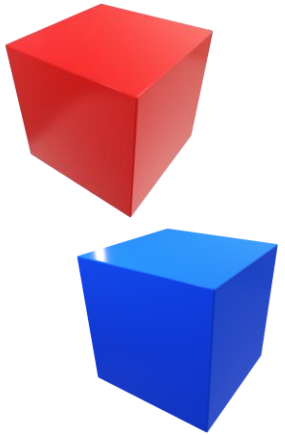


Felületek

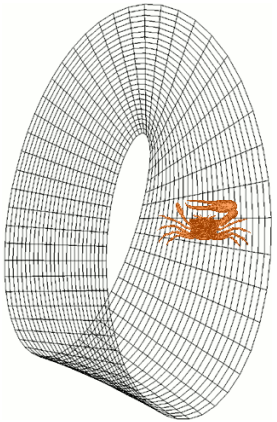


Felület, mint tér

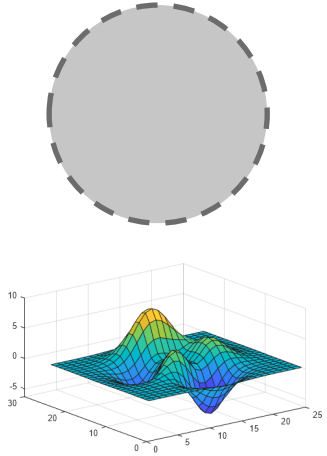
„Felületszerű” tér := összefüggő irányítható kompakt 2-sokaság.



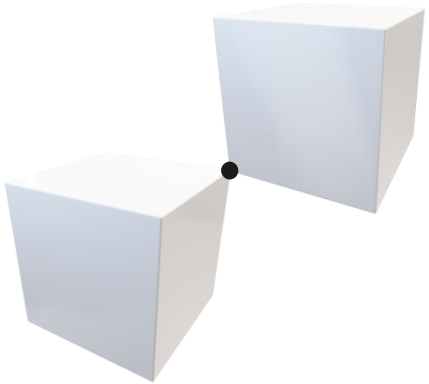
Nem összefüggő



Nem Irányítható



Nem Kompakt



Nem 2-sokaság

Felületek osztályozása I.

- A „felületszerű” tér megkülönböztethetetlen a gömbtől, vagy egymáshoz ragasztott fánkoktól.
- Létezik „szép” függvény kettejük között.
- Egyetlen lényegi különbség van a „felületszerű” terek között: a génusz.

g=0

g=1

g=2

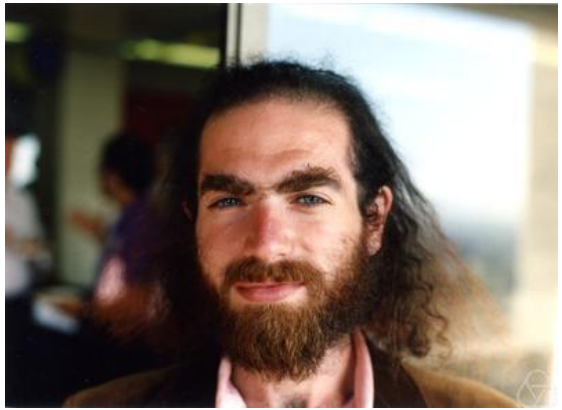
Felületek osztályozása II.

Egyszeresen összefüggő

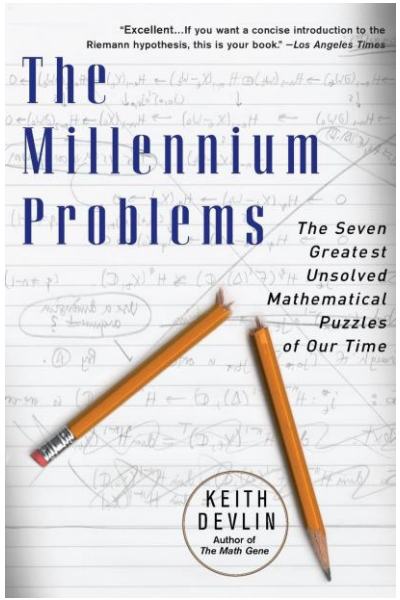
Nem Egyszeresen összefüggő

Millió Dolláros probléma

Poincaré



Perelman

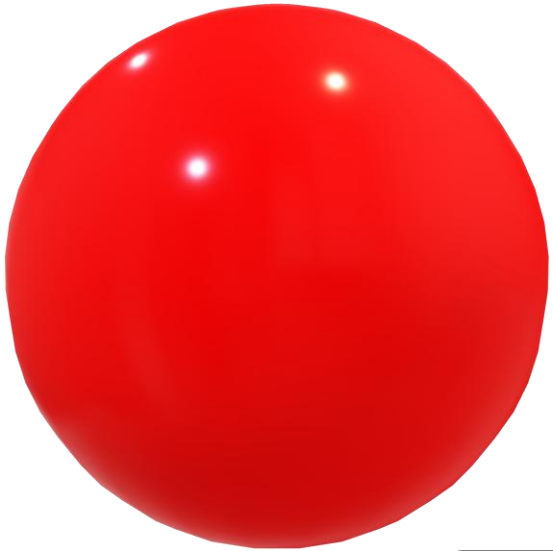


- Minden egyszeresen összefüggő „felületszerű” tér megkülönböztethetetlen a 2D gömbfelülettől.
- Igaz ez 3D-ben is?
- Poincaré-sejtés: Minden egyszeresen összefüggő „testszerű” tér megkülönböztethetetlen a 3D gömbfelülettől? (1904)
- Perelman: igen! (2002-2003 arXiv, 2006 Fields-érem, 2010 Millenium-díj)

Ki aludt az ágyacskámban?

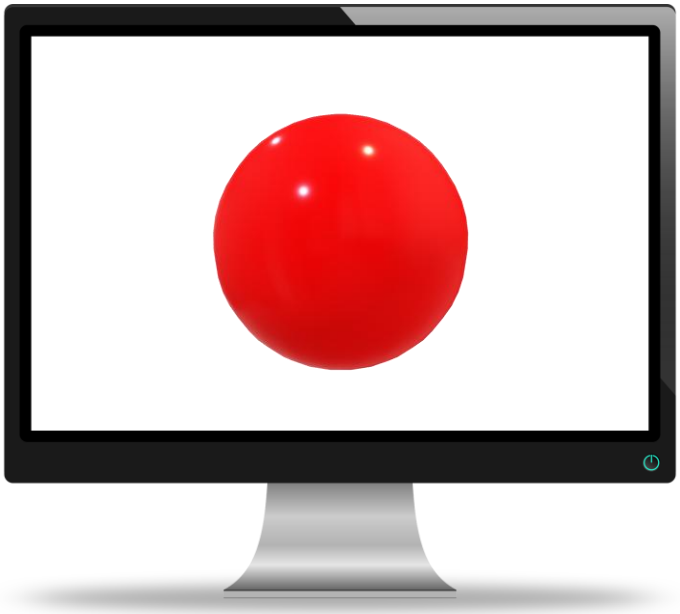
Hogyan definiáljuk a gömbfelületet?

„A gömb egy adott ponttól (középpont) egyenlő távolságra lévő pontok halmaz a térben.”

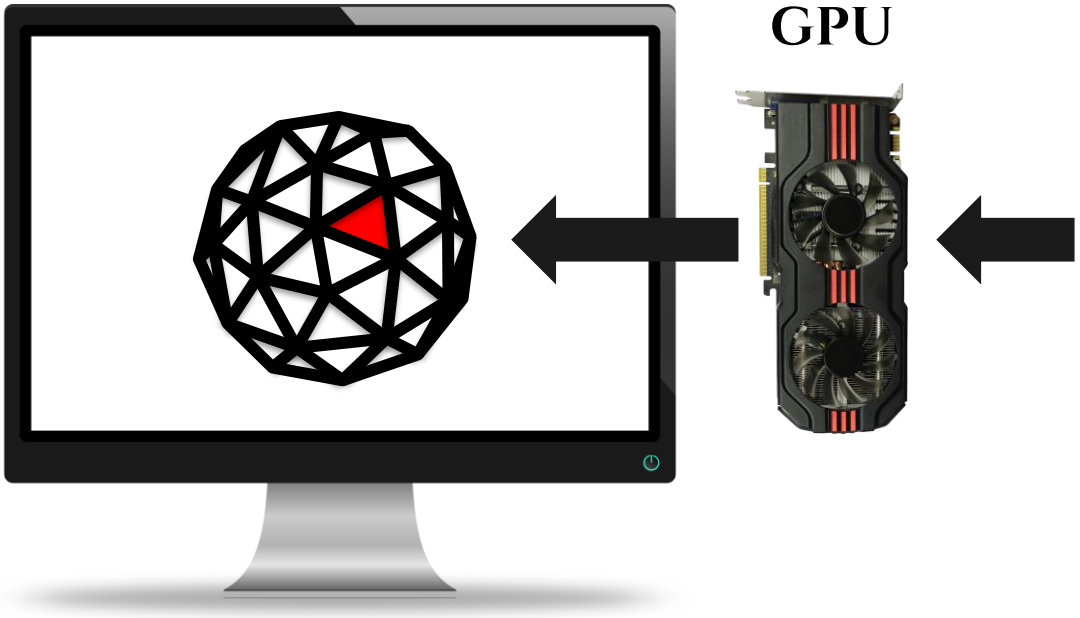


Ez végtelen sok pont. Ez informatikai szempontból kényelmetlen.

Hogyan fogjuk ezt megjeleníteni egy számítógép képernyőjén?



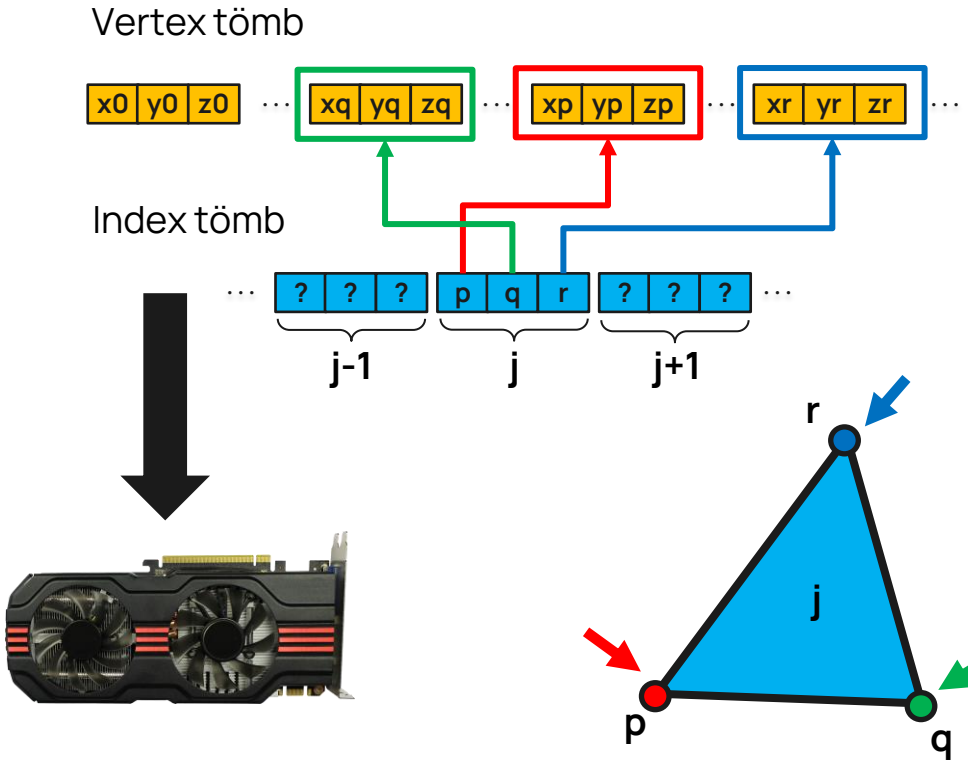
Számítógépes Grafika



.OBJ fájl részlete

```
v  0.018427 0.156004 -0.000000
v  0.018427 0.145774 -0.156074
v -0.051700 0.216506 -0.146842
v -0.042075 0.216506  0.000000
v  0.018427 0.156004  0.000000
v  0.018427 0.125000 -0.262331
v  0.007980 0.125000 -0.314855
[...]
f 1 3 4
f 1 4 5
f 1 2 3
f 4 3 10
f 4 10 11
f 11 10 20
f 11 20 21
f 20 35 34
```

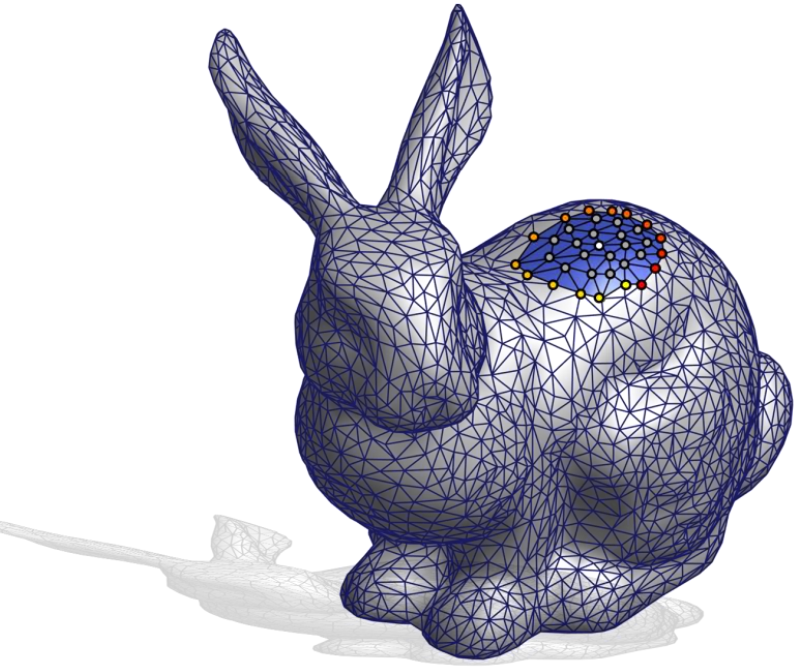
Háromszöghálók

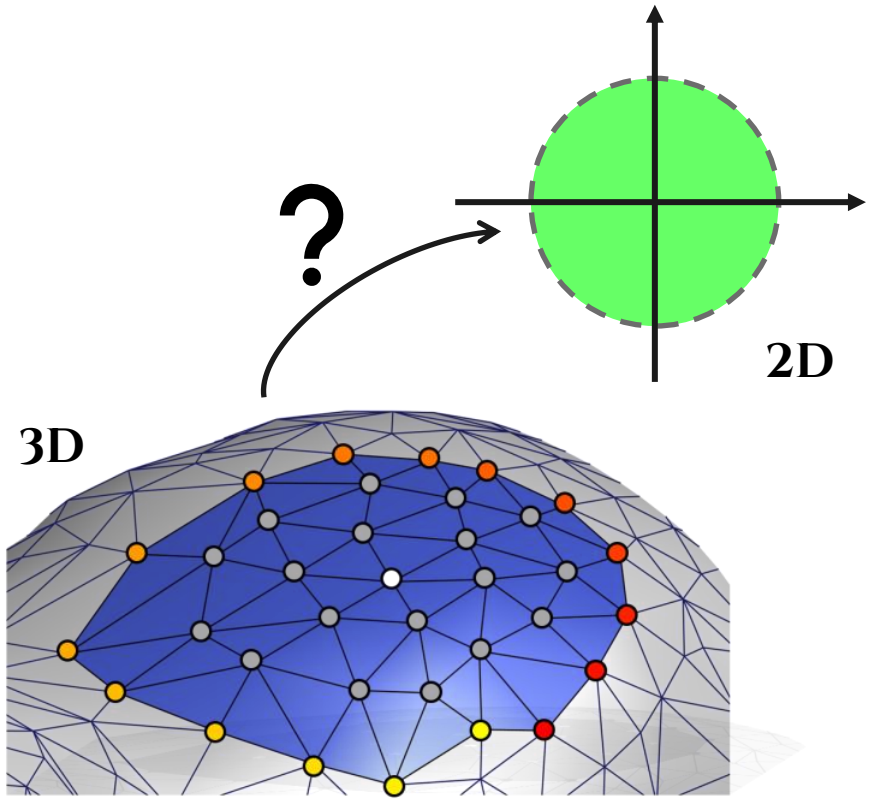


Felületek háromszögelése

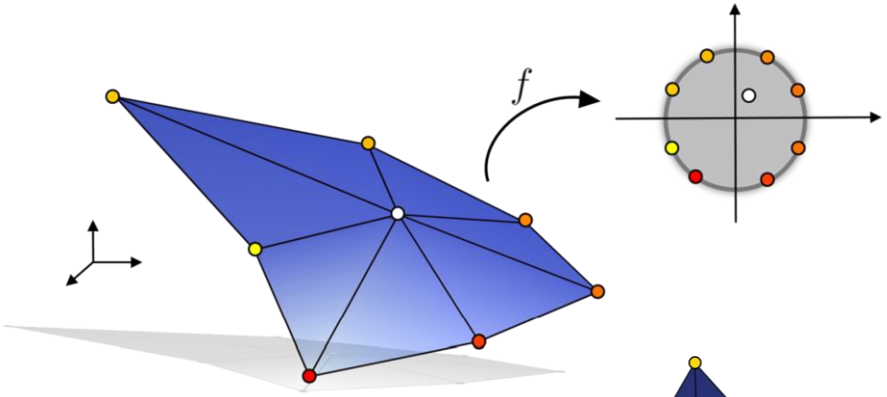
- Minden „felületszerű” tér háromszögelhető.
- Van olyan „szép” függvény, amely egy poliéderre képezi a felület pontjait.
- Gyakorlatban magát a háromszögelést állítjuk elő.
- A felület ekkor (lényegében) önmaga háromszögelése.
- A kérdés fordítva érdekes: hogyan kapható meg a felület matematikai leírása?

Háló beágyazása



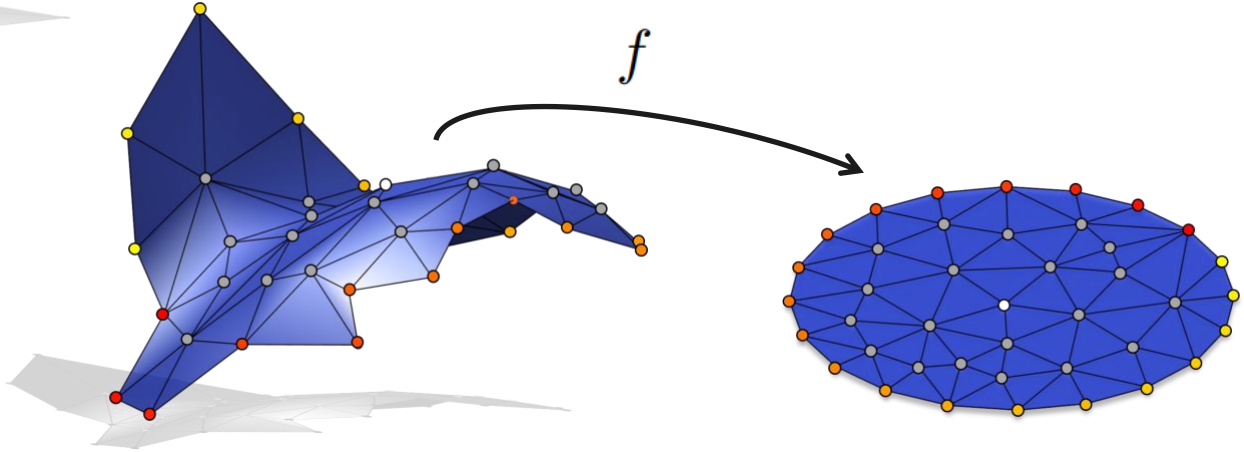


Háló beágyazása



Egyszerű...

Nem Egyszerű...

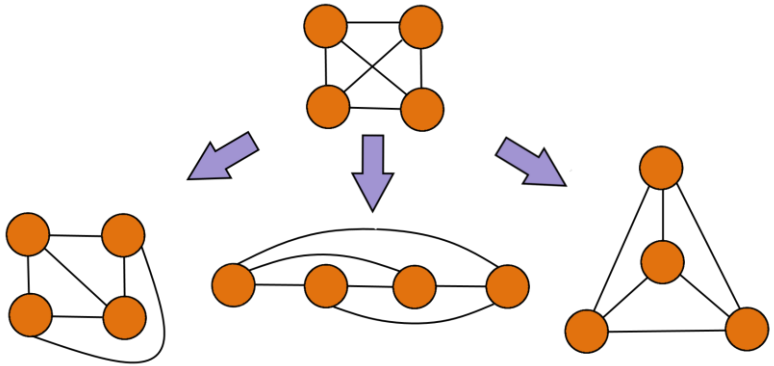


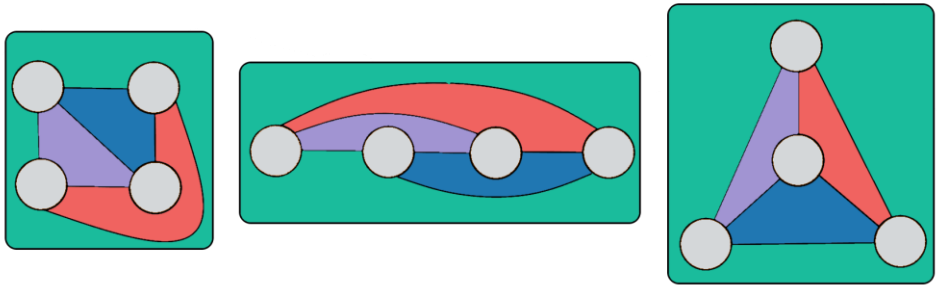
Gráf síkbarajzolása

- Le lehet rajzolni egy gráfot a síkba úgy, hogy az élei nem metszik egymást?
- Fáry-tétel: ha lerajzolható, akkor lerajzolható egyenes vonalakkal is!
- Euler-tétel: $V - E + F = 2$

Fáry István magyar matematikus EC tag volt ám.

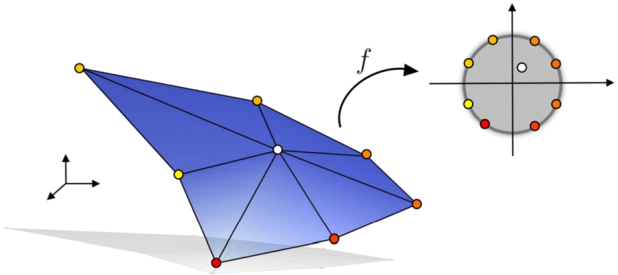
FYI





Tutte-beágyazás

- Legyen egy hálónk (gráfunk), amely (topológiailag) a zárt körlemez egy háromszögelése.
- Kétféle csúcsunk van: **perem**csúcsok és **belső** csúcsok.
- A peremcsúcsokat sorban helyezzük egy síkbeli konvex alakzatra, pl. egy szabályos sokszög csúcsaiba.
- A belső csúcsok kerüljenek a szomszédaik súlypontjába!



$$f(u) = \frac{1}{|N(u)|} \sum_{v \in N(u)} f(v)$$

Egyenletrendszer? Van rá algoritmusom…

$x = 3$ ~Perem

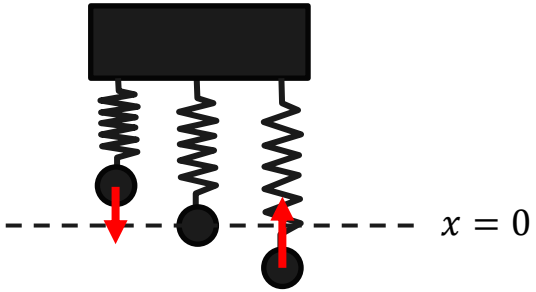
$y = \frac{x}{2} + \frac{z}{2}$ ~Belső

$z = 5$ ~Perem

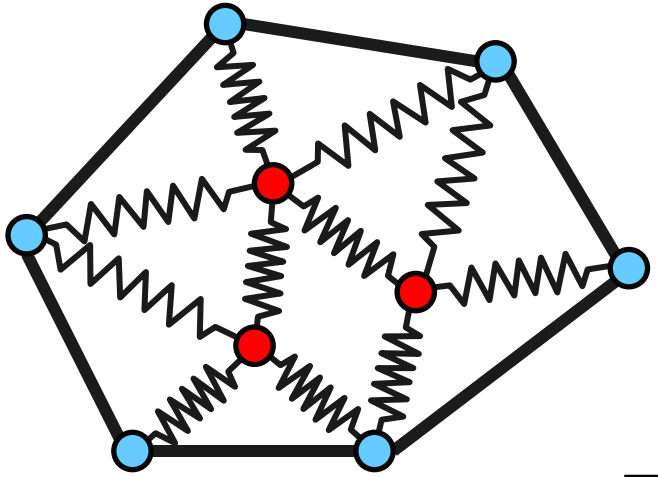
Tulajdonképpen hány ismeretlen is van ebben az egyenletrendszerben?

Hála az égnek, hogy van már számítógép!

Rugók hálózata



$F_r = -kx$



Egyensúly

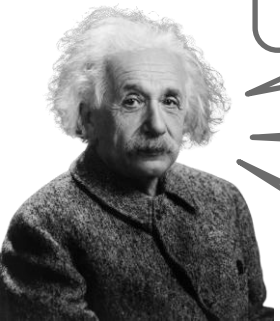
Tömegpontok pozíciója

$$F_r(u) = \sum_{v \in N(u)} -k(f(v) - f(u)) = 0$$

$$F_r(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v) - f(u) = 0$$

$$\sum_{v \in N(u)} f(v) = \sum_{v \in N(u)} f(u) = |N(u)| \cdot f(u)$$

$$f(u) = \frac{1}{|N(u)|} \sum_{v \in N(u)} f(v)$$

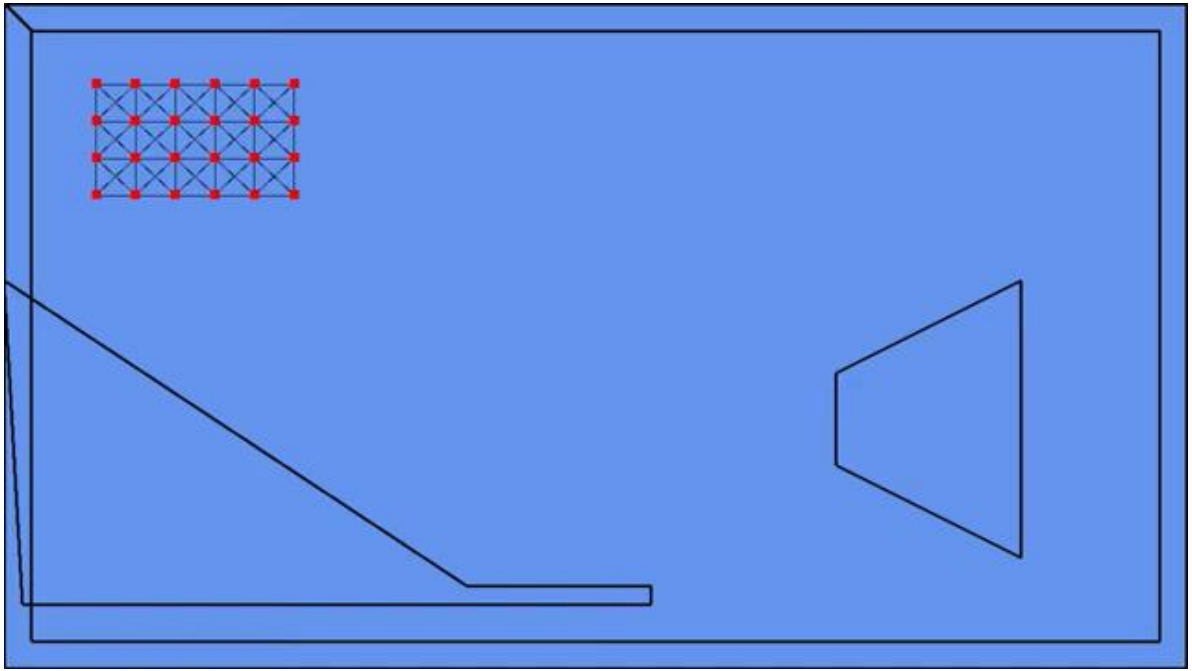


Várjunk egy percet. Hogy szól a Hooke-törvény?

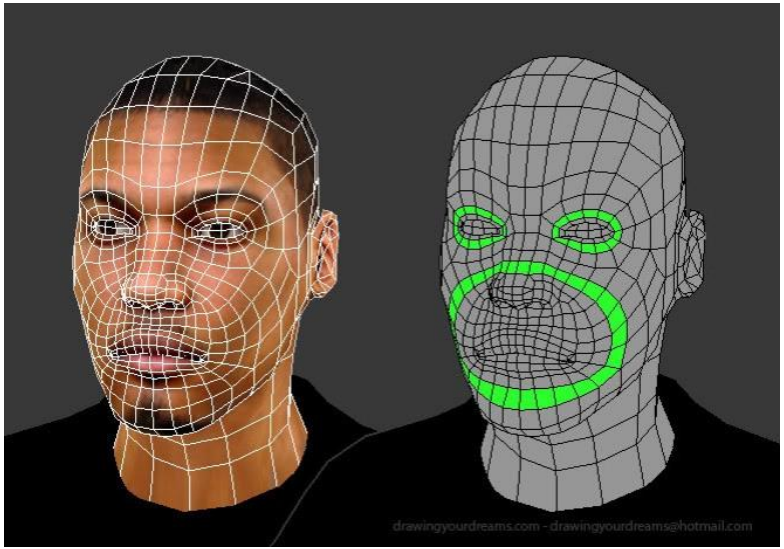
Mi az egyensúly feltétele?

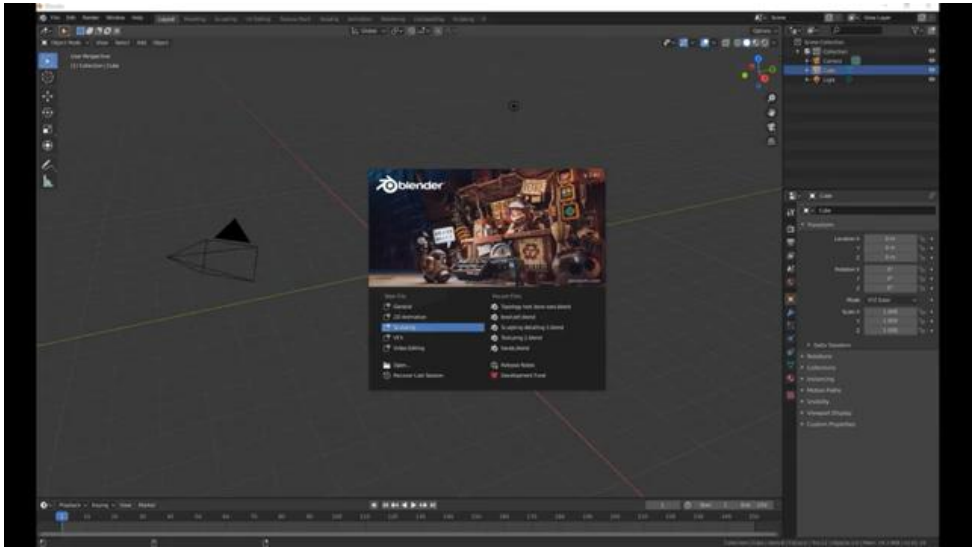
Hűha!

Deformálható testek



Textúrázás

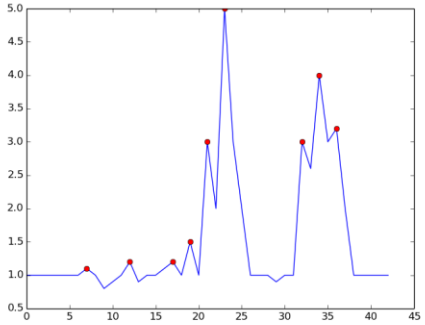




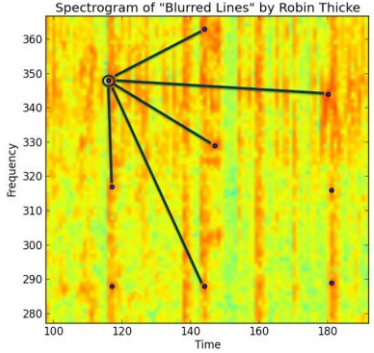
Behálózva

Jel Analízise

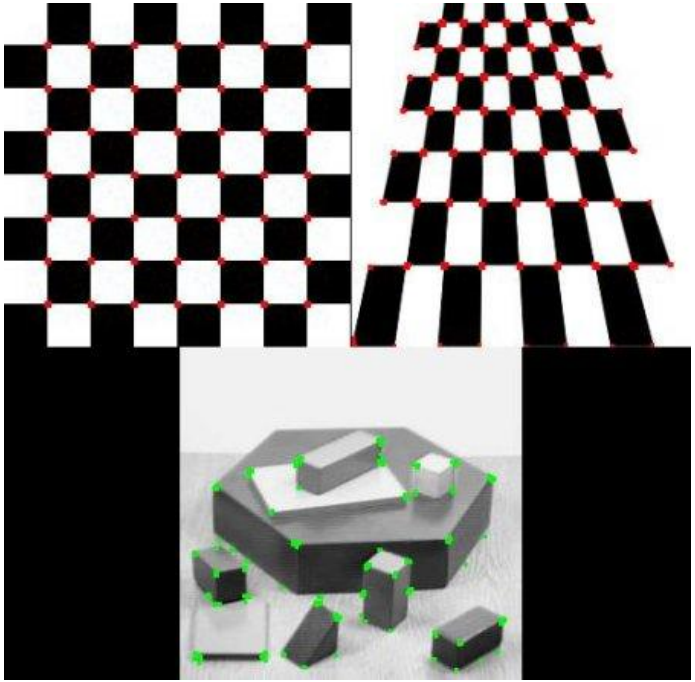
Csúcs detektálás



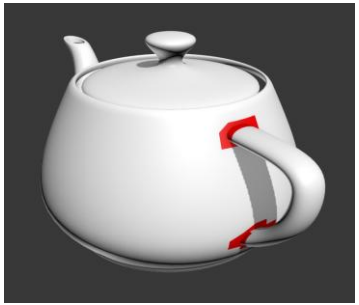
Akusztikus ujjlenyomat



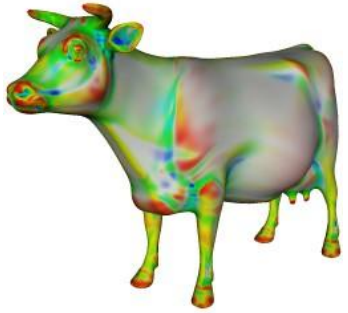
Sarok detektálás



Önmetszés detektálás

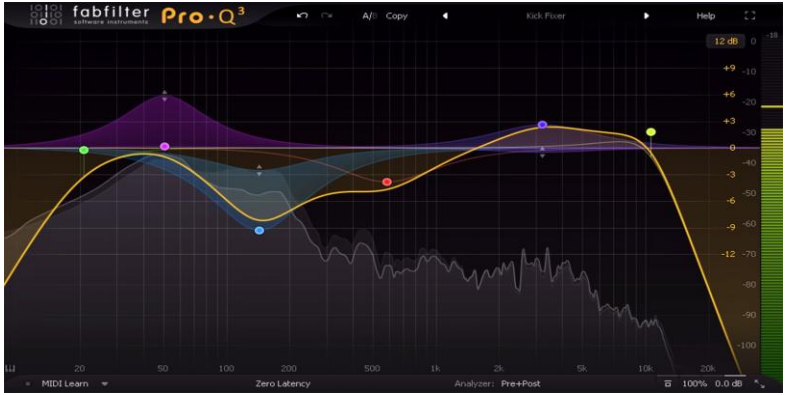


Görbület-térkép



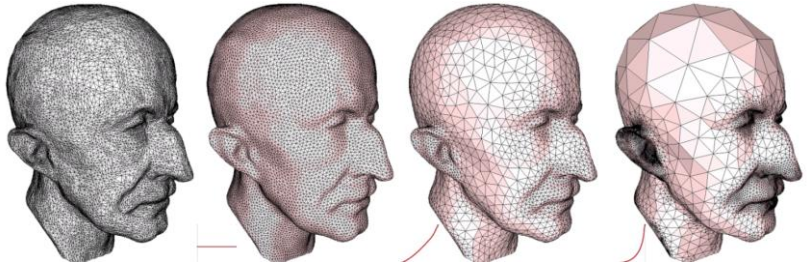
Jel átalakítása

EQ

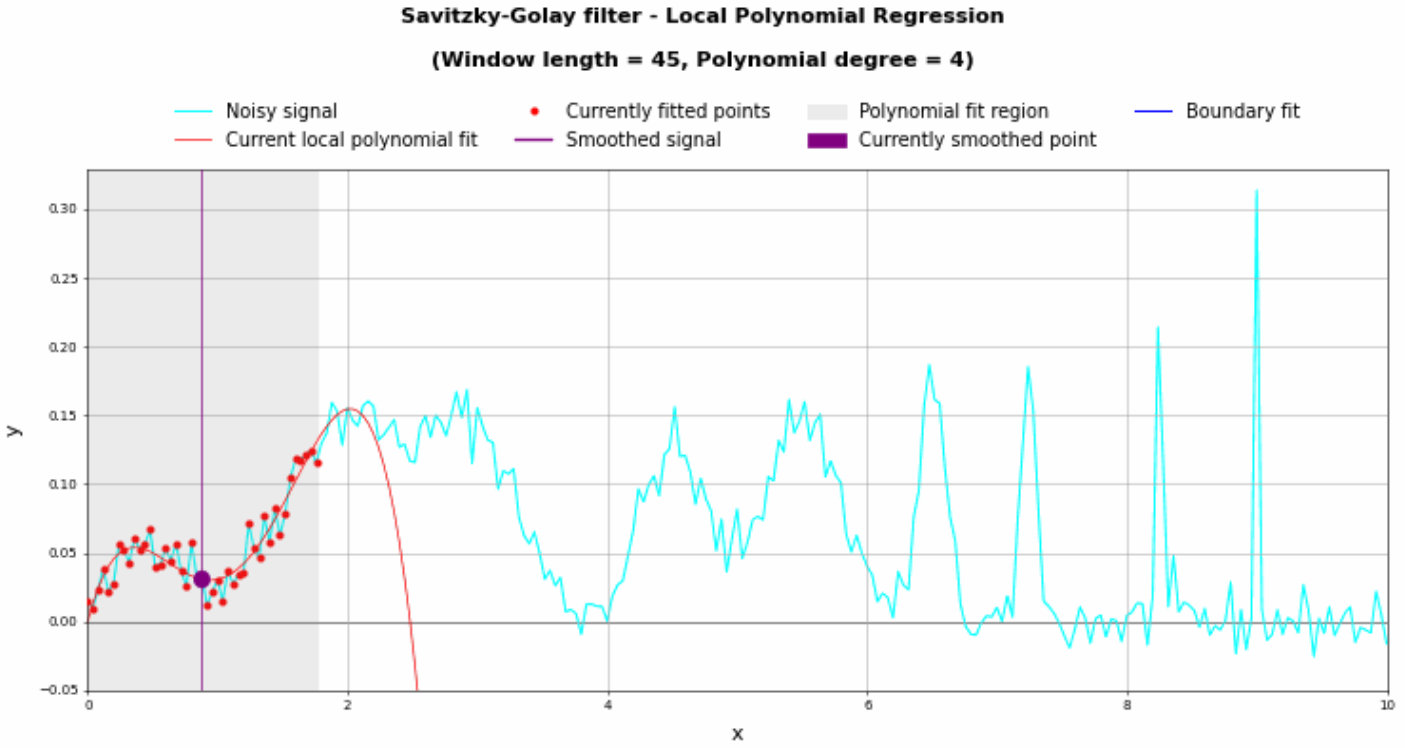


Élesítés

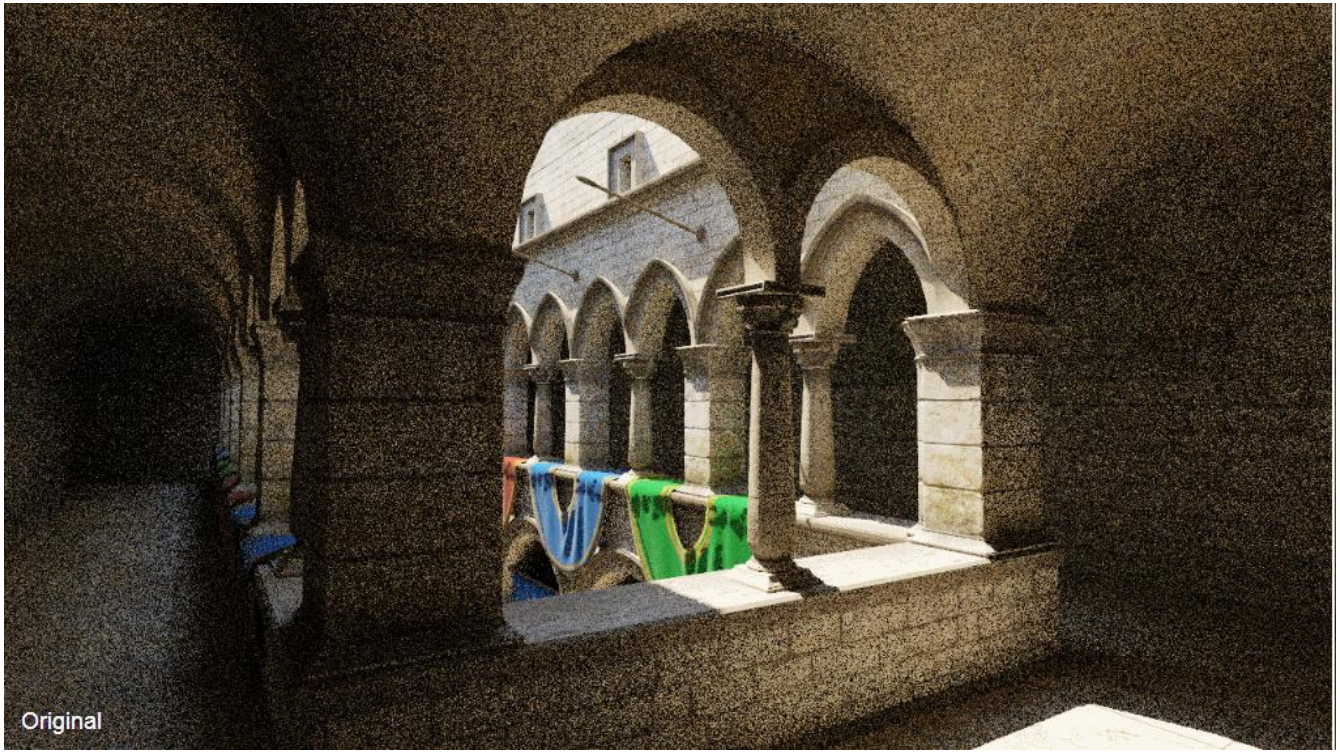
Újrahálózás, háló javítás



Zajszűrés (1D)



Zajszűrés (2D)

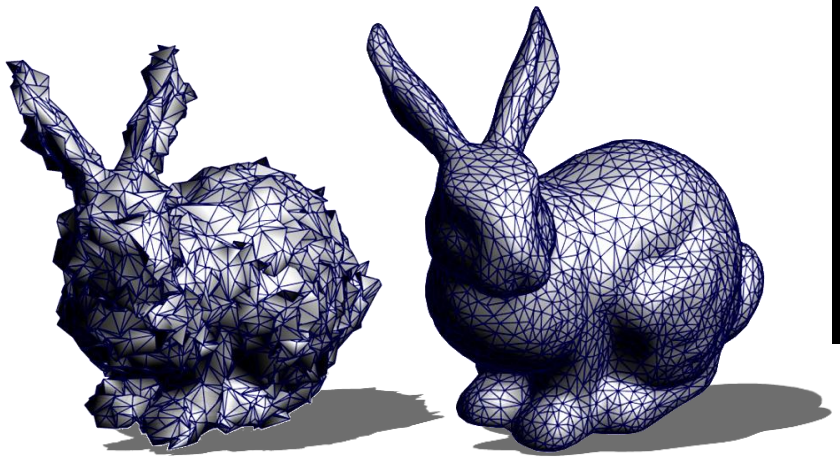


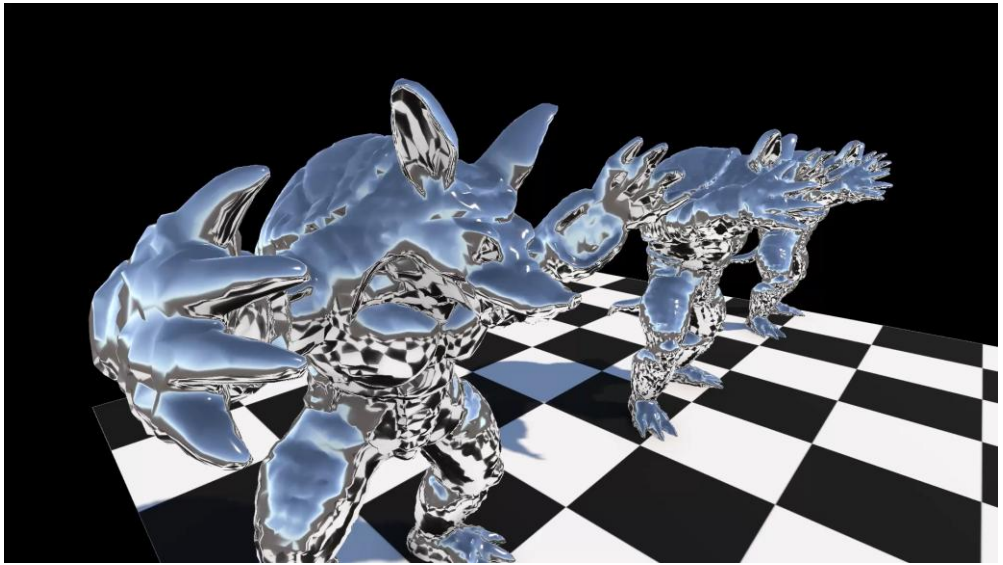
Laplace-szűrő

- Kerüljön minden csúcs a szomszédai súlypontjába (ismét)!

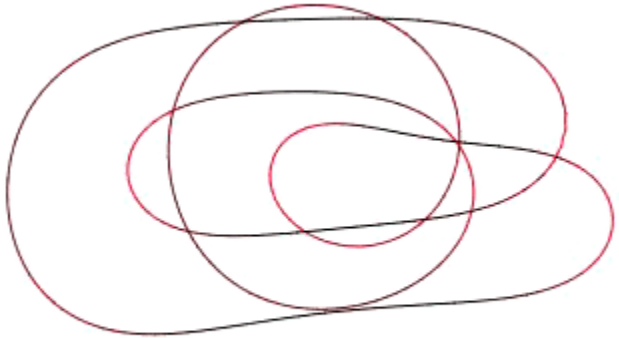
$$u' = \frac{1}{|N(u)|} \sum_{v \in N(u)} v$$

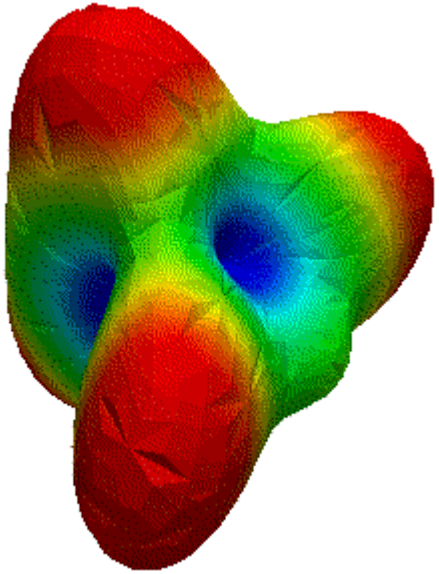
- Vannak ennél ügyesebb eljárások is!





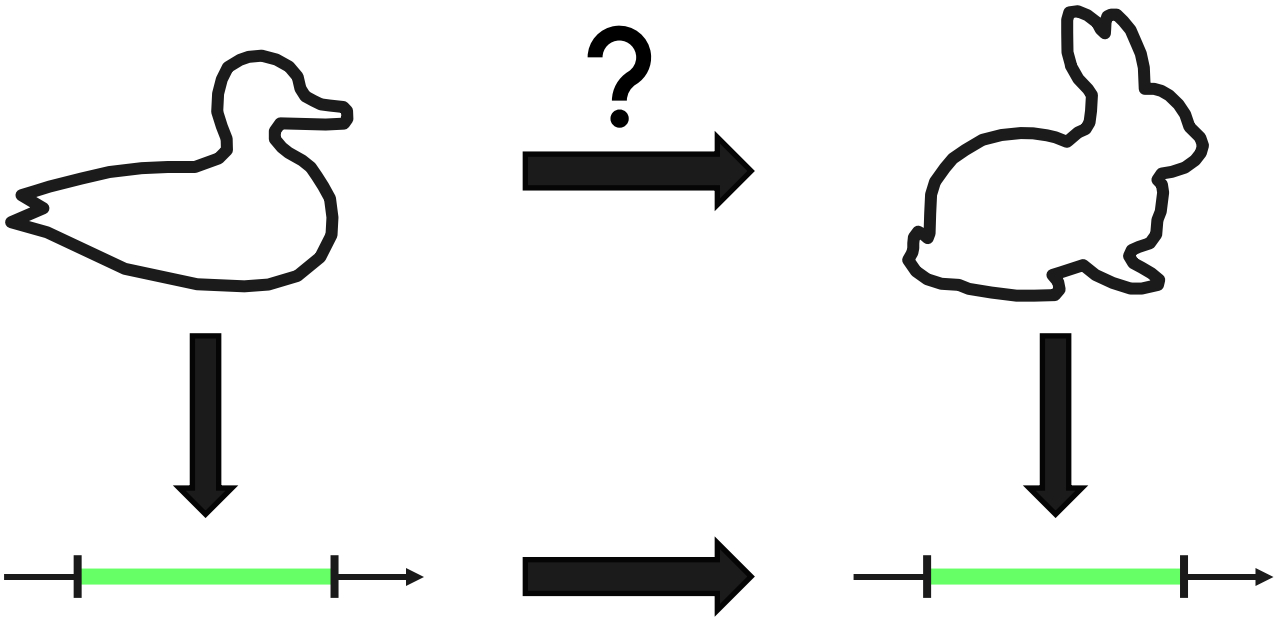
Hova tartunk?



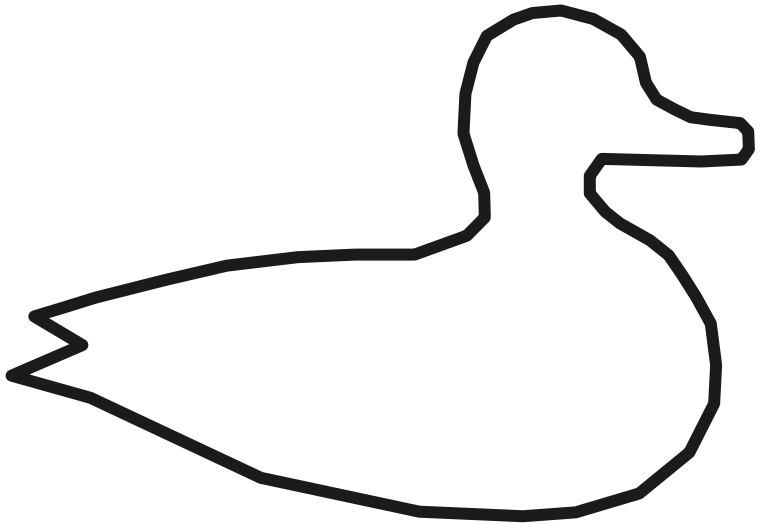


Elfolyó tér

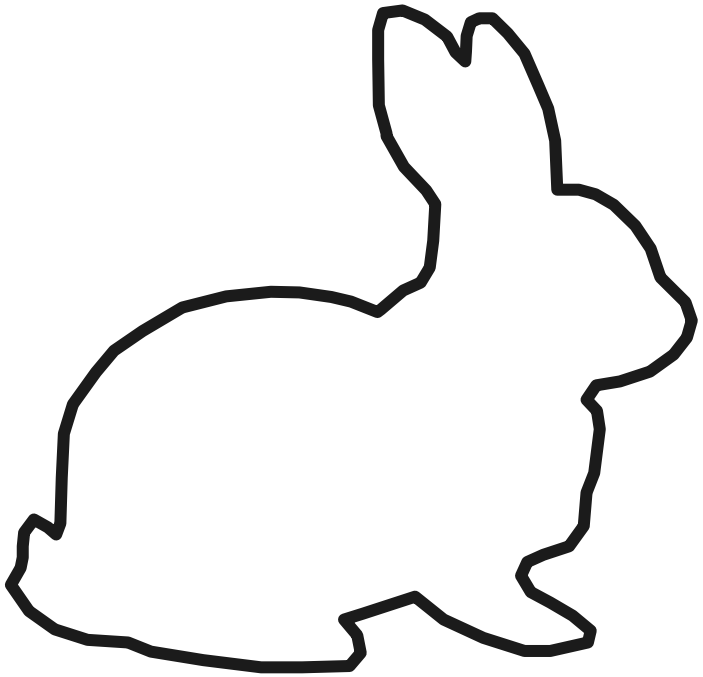
Átmenet (1D)



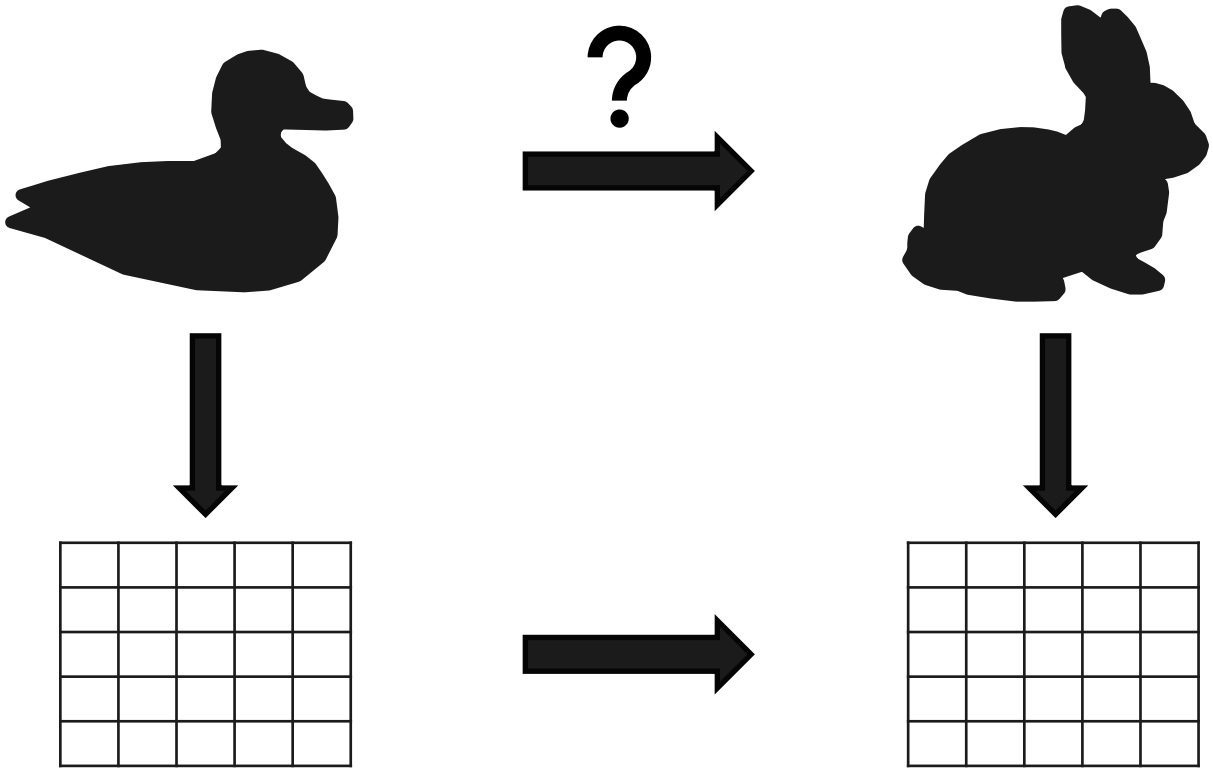
Kacsa-Nyúl (1D)



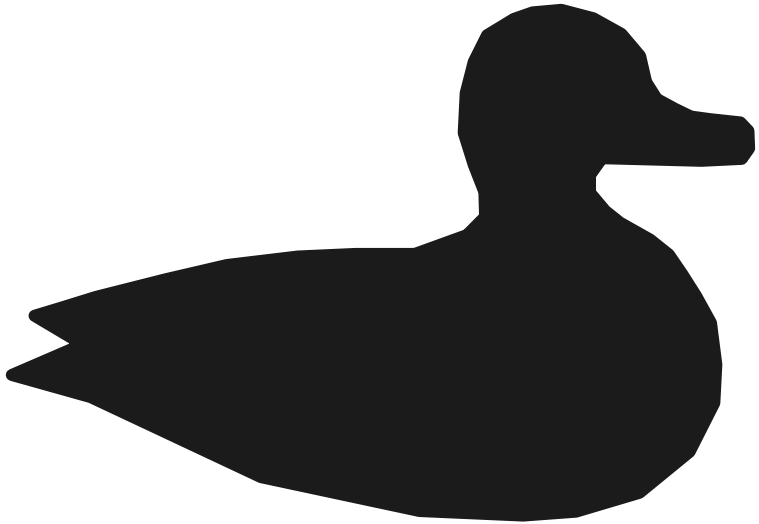
Kacsa-Nyúl (1D)



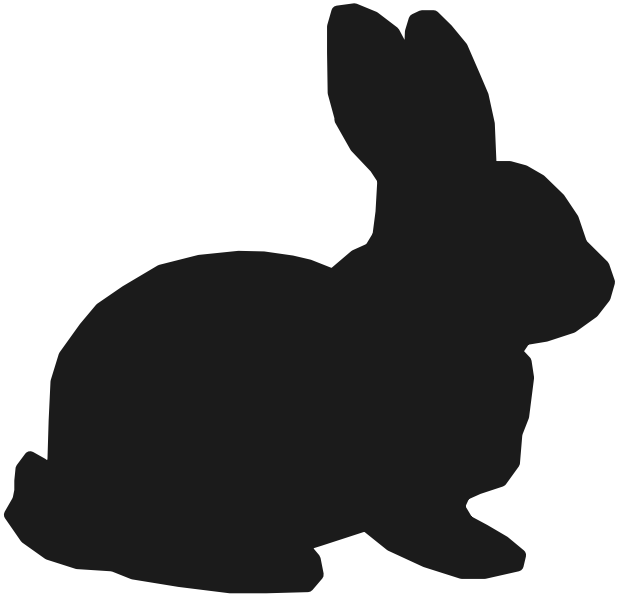
Átmenet (2D)



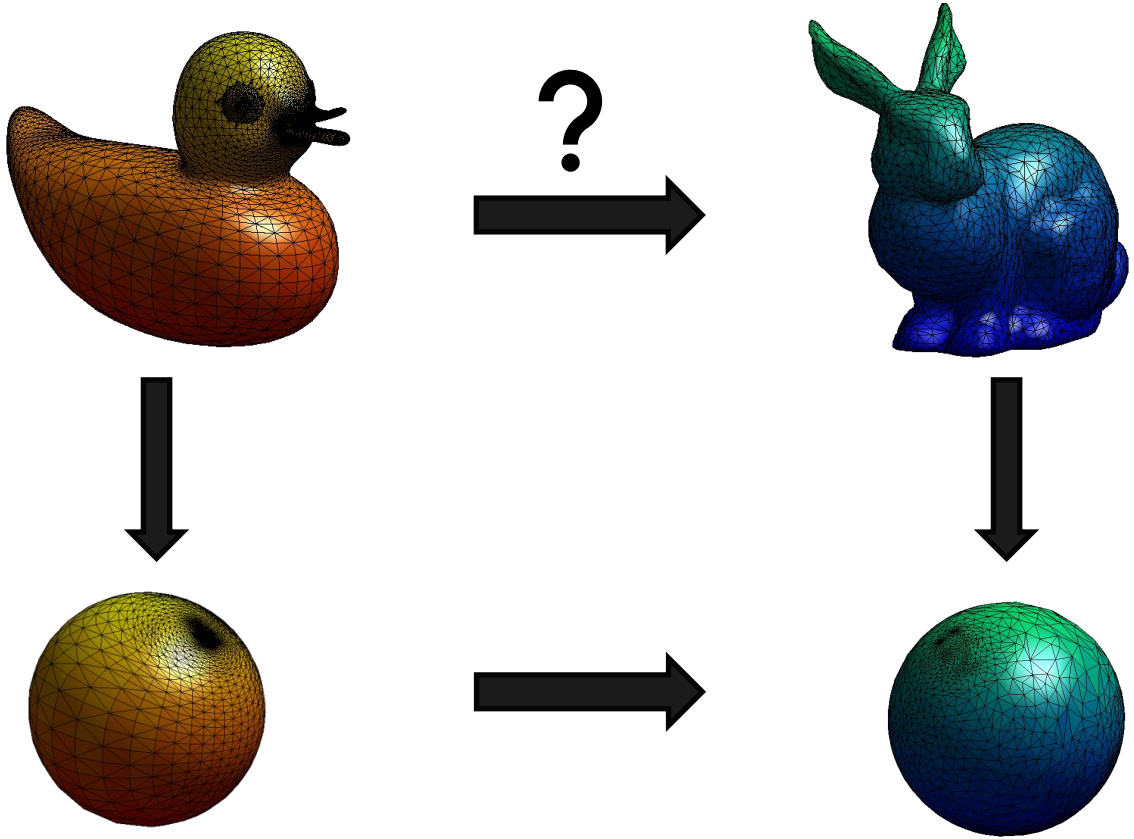
Kacsa-Nyúl (2D)



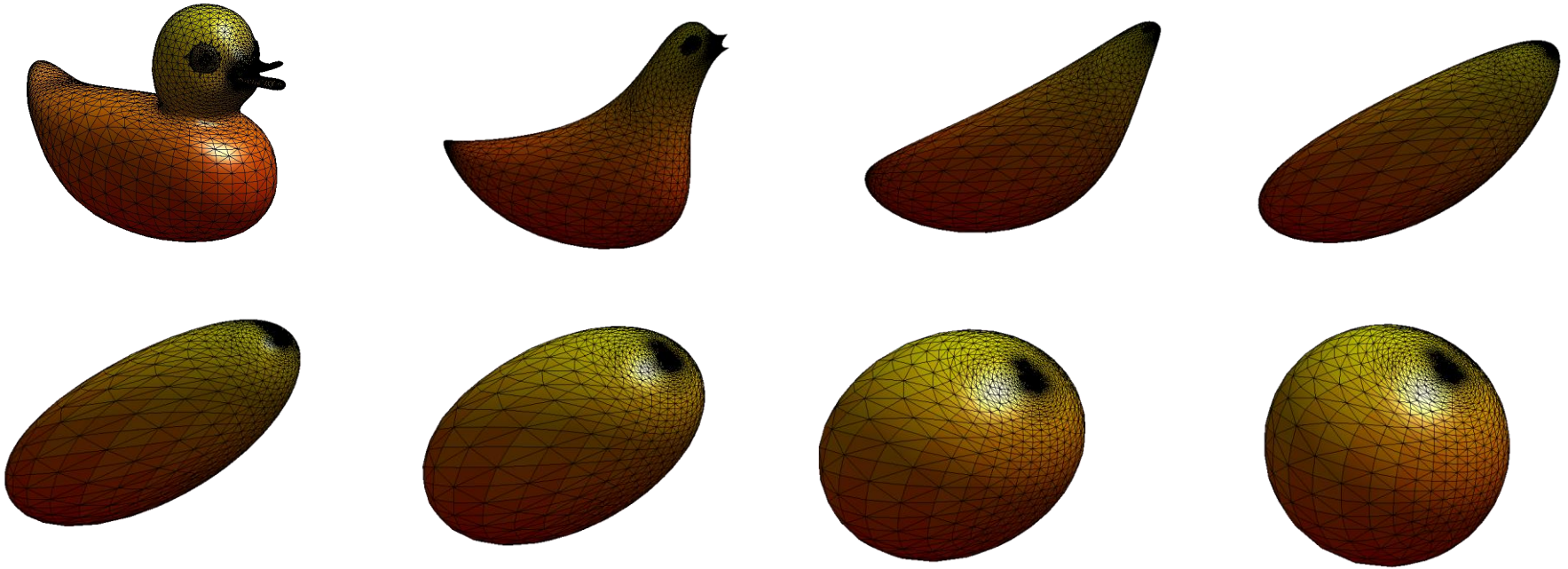
Kacsa-Nyúl (2D)



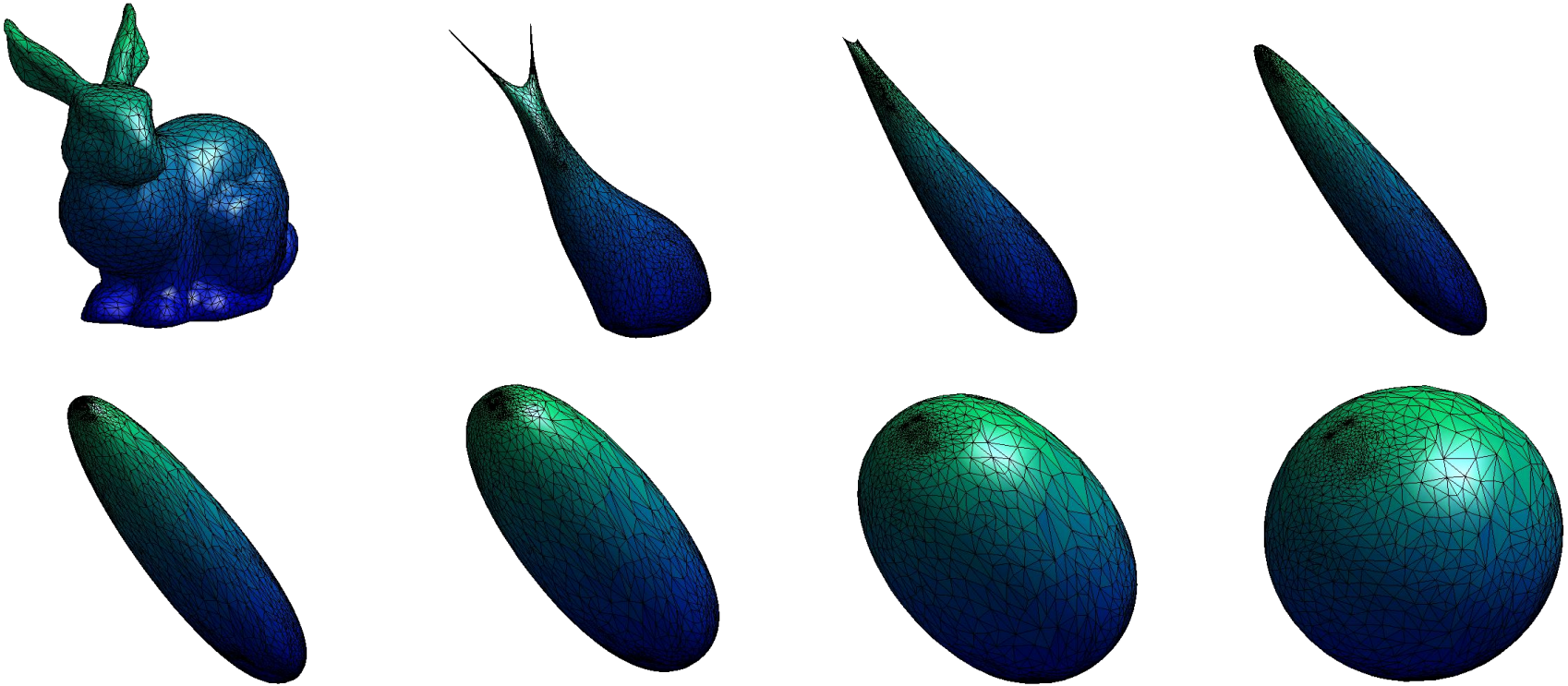
Átmenet (3D)



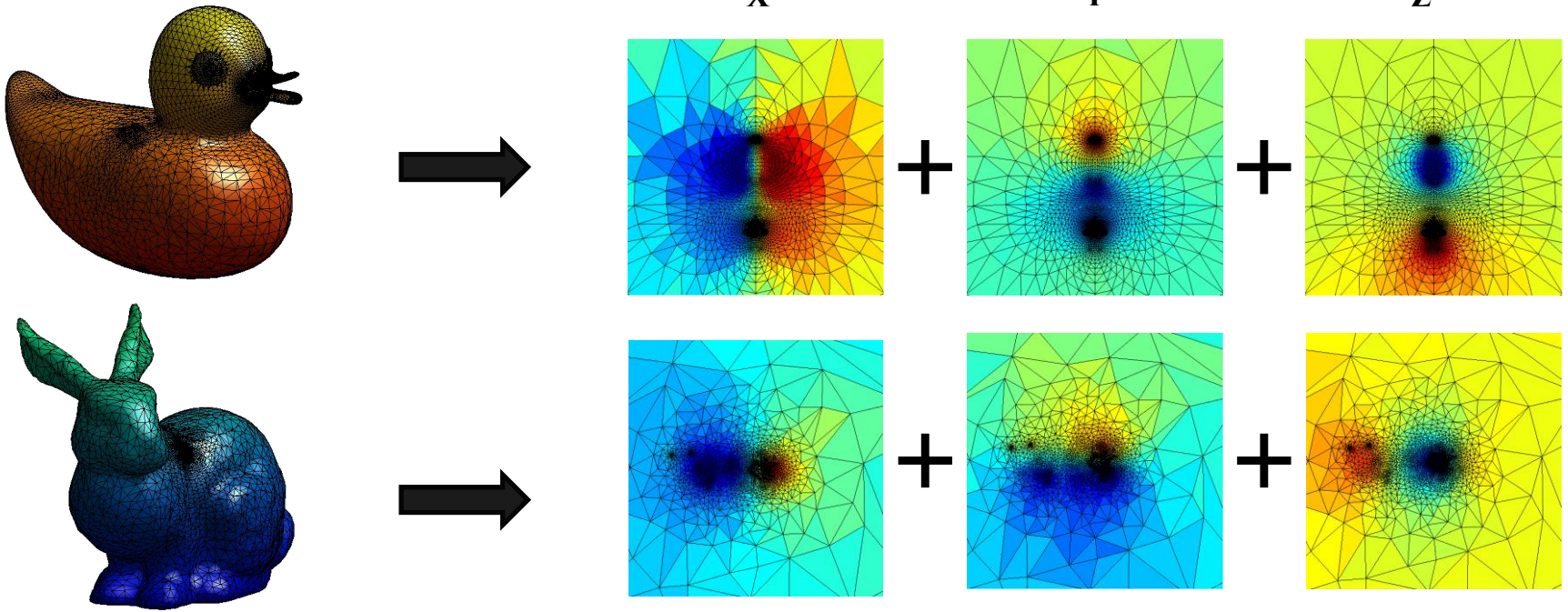
Kacsa-Gömb



Nyúl-Gömb

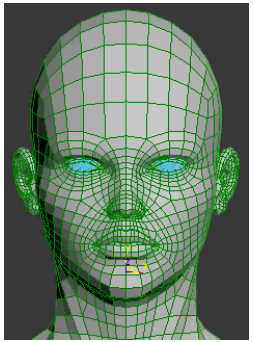


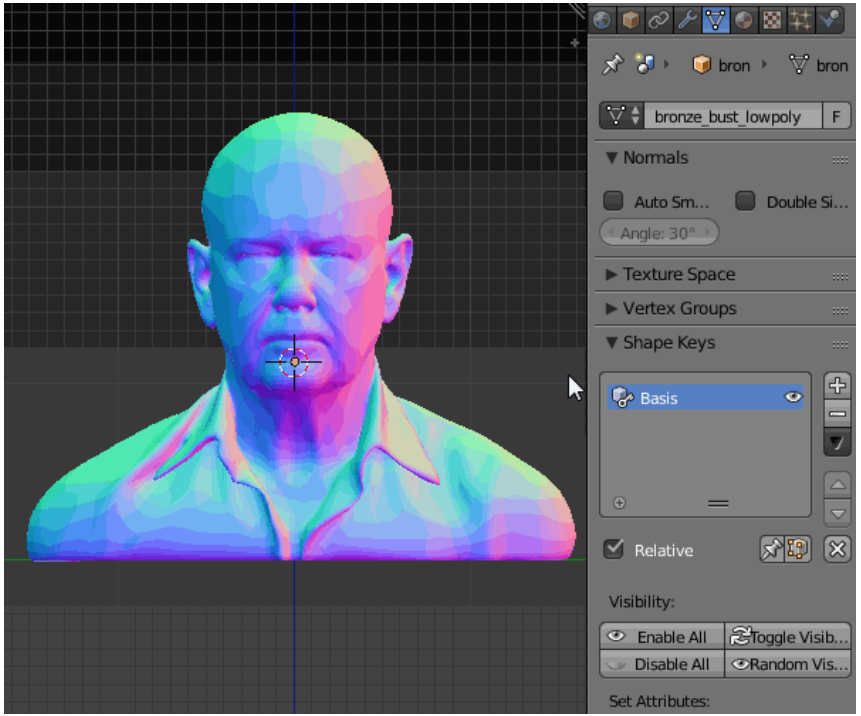
Paraméterezések



Kacsa-Nyúl (3D)

Torzuló, Elfolyó, eltörő, Terek





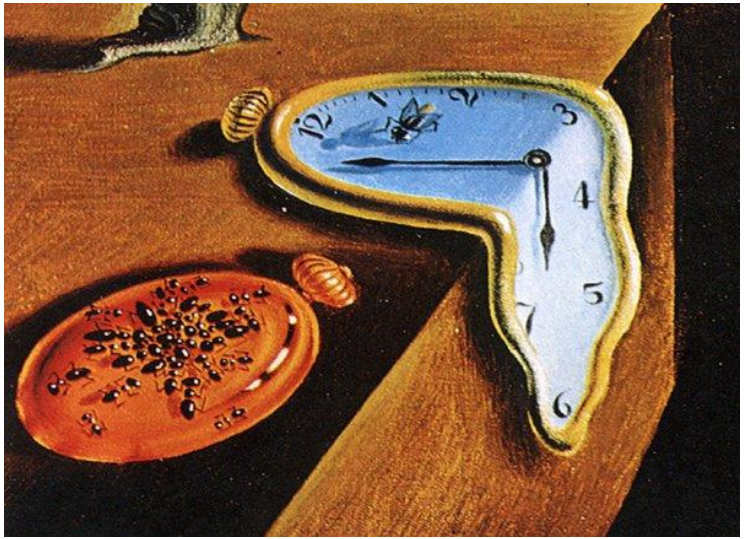
Felhasznált Képek (Hozzáférés: 2025. 07. 20.)

- https://historia-arte.com/obras/la-persistencia-de-la-memoria
- https://cdn.britannica.com/27/190027-050-A9A35298/Carl-Friedrich-Gauss-engraving.jpg?w=300
- https://en.wikipedia.org/wiki/File:Albert_Einstein_1947.jpg
- https://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:JohnvonNeumann-LosAlamos.jpg
- https://www.stanfords.co.uk/media/catalog/product/700x700/p/h/physical-world-map-atlas-of-the-world-11th-edition-compact.jpg
- https://pixabay.com/hu/photos/gpu-%C3%B6sszetev%C5%91-videok%C3%A1rtya-1316015/
- https://cdn.pixabay.com/photo/2016/04/08/06/25/screen-1315650_1280.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fd/Tibor_Rad%C3%B3_-_Matematikai_konferencia_Szegeden_%281928%29.jpg?20211213094551
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Henri_Poincar%C3%A9-2.jpg
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/Perelman%2C_Grigori_%281966%29.jpg
- https://nl.mathworks.com/help/examples/graphics/win64/Creating3DPlotsDefaultCmapExample_02.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/36/Green_Sphere_illustration.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9f/Torus_illustration.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bc/Double_torus_illustration.png

Felhasznált Képek (Hozzáférés: 2025. 07. 20.)

- https://mathspace-production-media.mathspace.co/media/upload/Networks/5%20-%20Planar%20networks/plan2.png
- https://mathspace-production-media.mathspace.co/media/upload/Networks/5%20-%20Planar%20networks/plan3.png
- https://theanimationjournalofnadinerosem.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/01/01-3.jpg
- https://i.sstatic.net/7XLx7.png
- https://gfx.cs.princeton.edu/pubs/Rusinkiewicz_2004_ECA/cow.jpg
- https://docs.opencv.org/3.4/harris_result.jpg
- https://www.klaasnienhuis.nl/wp/wp-content/uploads/2013/07/NAV_2014-12-17_1297.jpg
- https://blacktidemusic.com/wp-content/uploads/best-eq-plugins-review-1680x840.jpg
- https://www.adobe.com/products/photoshop/media_1922f13734b00b947a257f807c0364e879778633a.png
- https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/meshpapers/AlliezUcelliGotsmanAttene.pdf
- https://www.cs.wustl.edu/~taoju/research/scanpaper_final.pdf
- https://media.istockphoto.com/id/477829947/photo/pocket-watch.jpg?s=612x612&w=0&k=20&c=LIFSqdnVddG1rk2ale-GcaoDNxD6gTYX3aEFYYpfUeU=
- https://qph.cf2.quoracdn.net/main-qimg-e5eda5313c7126322029b92d1b4a80c3-lq

Felhasznált Videók (Hozzáférés: 2025. 07. 20.)

- https://hu.wikipedia.org/wiki/Topol%C3%B3gia#/media/F%C3%A1jl:Mug_and_Torus_morph.gif
- https://www.joerg-enderlein.de/topology
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/Fiddler_crab_mobius_strip.gif
- https://www.youtube.com/watch?v=YsC1_LhCjsE
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Savitzky_golay_local_regression_wl045_pd04.gif
- https://www.foxrenderfarm.com/uploads/2019/02/intel-release-open-image-denoiser-4.gif
- https://www.youtube.com/watch?v=p0skN7hiEYw
- https://math.berkeley.edu/~donoghue/reu/curve2.gif
- https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/andreas_dedner/mcf2a.gif
- https://raw.githubusercontent.com/amilajack/gaussian-blur/HEAD/img/demo.gif

Köszönöm a figyelmet!