A világ alakja

Felületek a matematikában és a számítógépes grafikában

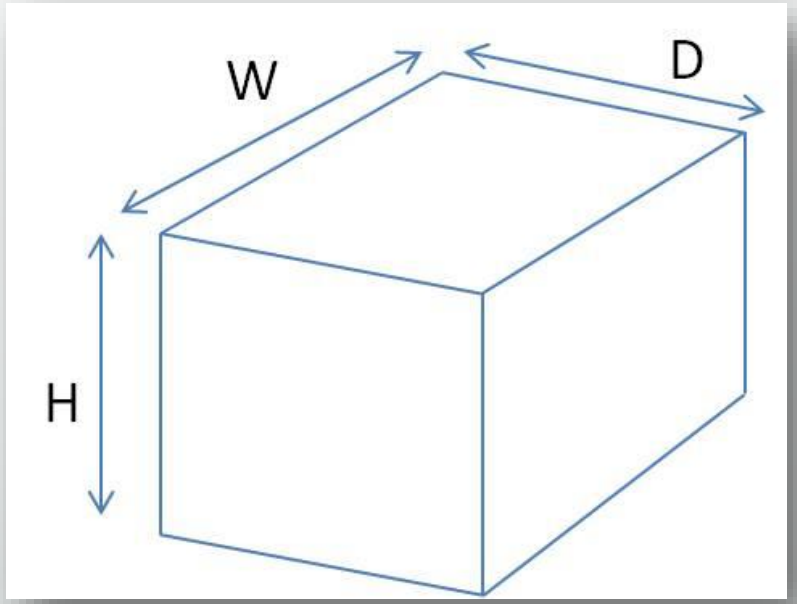
Fábián Gábor, ELTE-IK Numerikus Analízis Tanszék

2019. 09. 27.

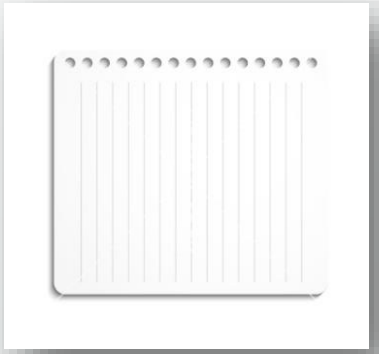
http://1.bp.blogspot.com/-hdR8Ooefq2Q/VbjOLudcXPI/AAAAAAAAAMk/pjgPhpvjJcQ/s1600/sand%2Bgrain%2B.png
http://66.media.tumblr.com/336e4152fcb89301ba883d9e1fe1cdda/tumblr_nyhg5oXDAi1sigojto3_1280.jpg
http://www.jeremybakker.com/files/images/25_8-fraction-of-the-whole-107-928-grains-of-sand-detail.jpg
https://cdn.vectorstock.com/i/composite/49,17/notebook-paper-sheet-vector-3294917.jpg
http://www.polybagsforless.com/mm5/graphics/00000001/palletcovers.jpg

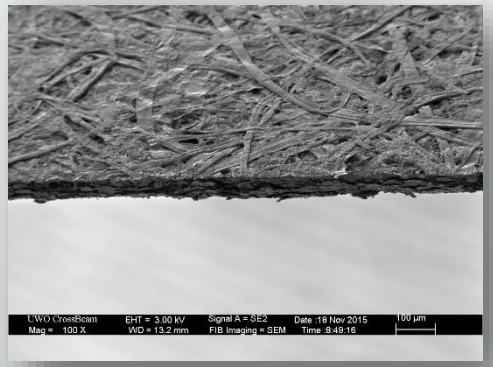
Háromdimenziós világ

3D



2D?



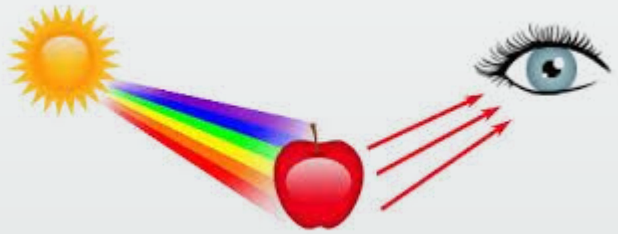


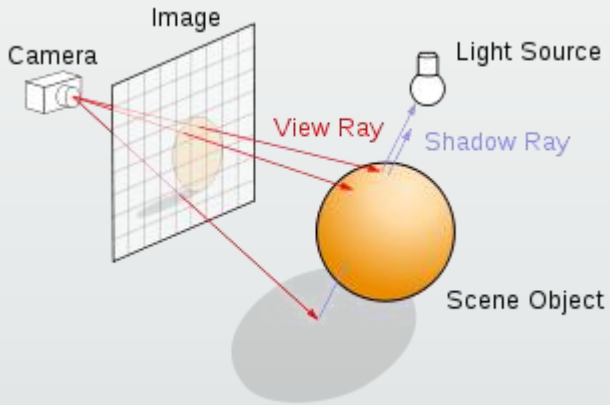
1D?

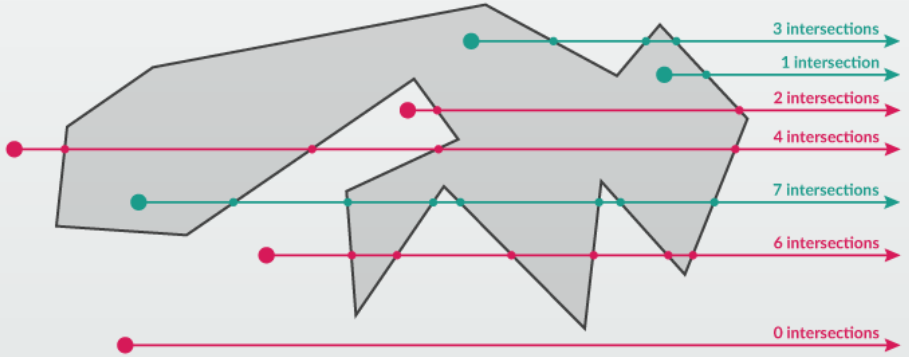
http://assets.opennews.org/img/wherewolf/raycasting.png
https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTIInK9d-uHiSWoSfphz1wN6553J5brJJnCCoxyVp-M1tP6RtW8DQ
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/83/Ray_trace_diagram.svg/300px-Ray_trace_diagram.svg.png

Mit érzékelünk?

- A fény a látás alapja
- Csak a 3D objektumok határát látjuk!



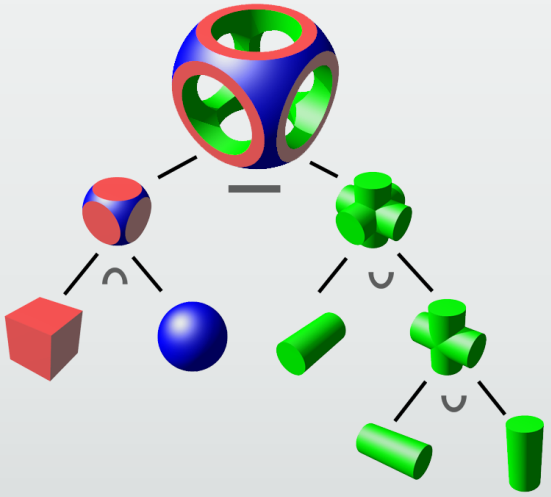


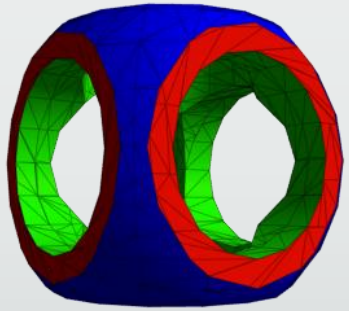


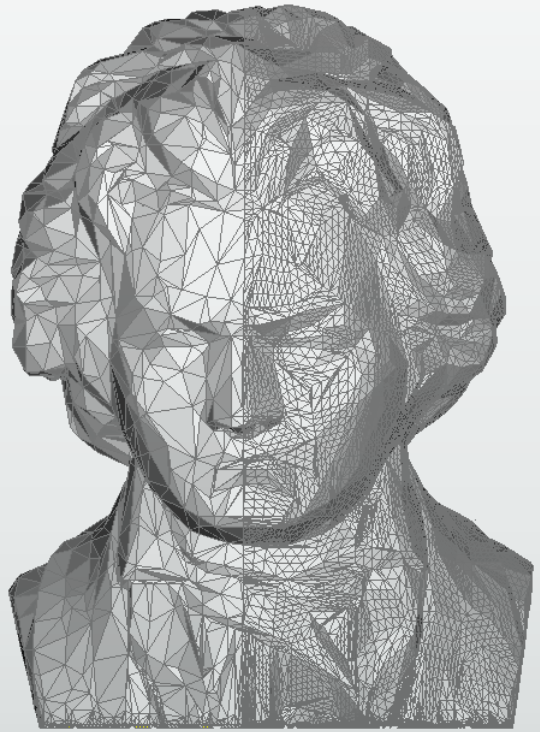
http://www.final-surface.com/images/plugins/refining/refining-title.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8b/Csg_tree.png
http://media.tumblr.com/tumblr_lvqxptzYYz1qbis4g.png

Testek és felületek

- Testek felépíthetők 3D objektumokból
- Egyszerűbb azonban felépíteni a felületüket!







https://www.opengl.org/discussion_boards/showthread.php/171391-Request-multiple-index-streamshttp://2.bp.blogspot.com/-CEeBlYdGPfs/UWxZDzysuaI/AAAAAAAAAVo/Ft2c9ktSzyc/s1600/VBandIB.png

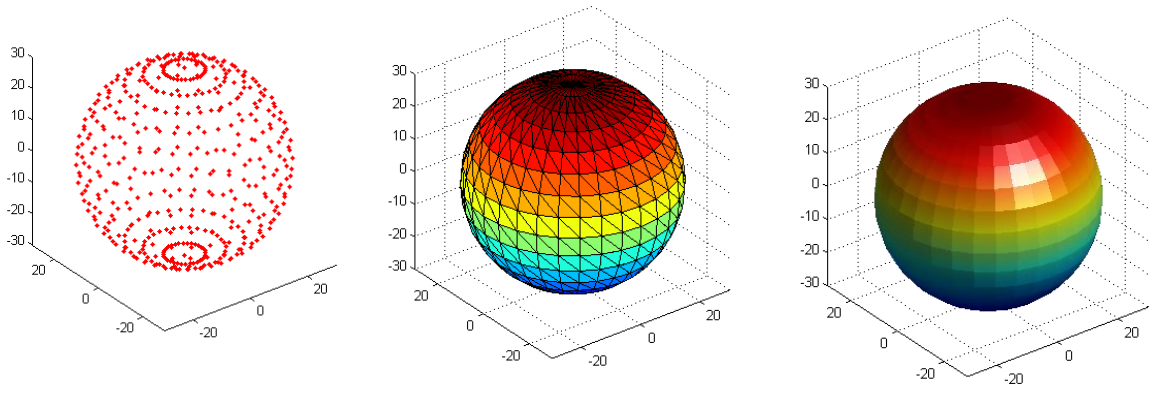
Felületfogalom a számítógépes grafikában

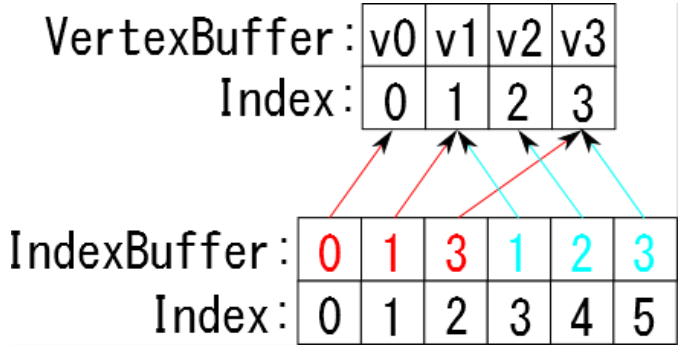
- Vertexpuffer: 3D térbeli pontok.
- Indexpuffer: Azon pontok címkéinek hármasai, amelyek egy háromszöget alkotnak.
- CG felület: A háromszögek összessége.

```
glBindVertexArray(vao);
glBindBuffer(GL_ARRAY_BUFFER, posBuffer);
glVertexAttribPointer(0, 4, GL_FLOAT, GL_FALSE, 0, 0);

glBindBuffer(GL_ELEMENT_ARRAY_BUFFER, posIndexBuffer);
glVertexIndexPointer(0, GL_UNSIGNED_BYTE, 0, 0);

glDrawIndexedArrays(GL_TRIANGLES, 0, number_points);
```





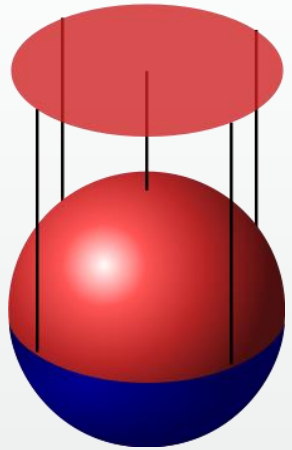
https://3dprint.com/wp-content/uploads/2015/08/fffffff.png

Felületfogalom topológiában

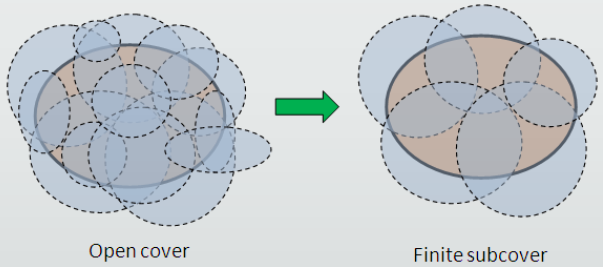
- *tóposz*: hely
- *logosz:* ész, beszéd, logika, tanulmányozás
- *K: Ki a topológus?*
  V: Az, aki nem tud különbséget tenni egy fánk és egy kávés bögre között.
- ,,Fizikai" felület egyszerűen: a 3D térbeli pontok halmaza
  - minden kis részhalmaz elegendően közelről nézve két dimenziósnak tűnik
  - minden pont egyazon objektumhoz tartozik
  - a pontok által meghatározott objektum kiterjedése és bonyolultsága véges, és kizárólag az objektum pontjain haladva nem találjuk annak határát
  - az objektum egyértelműen definiálja azt a teret, amelyet bezár
- A ,,fizikai" felület bonyolultan: összefüggő, kompakt, irányítható topológiai *2-sokaság* (azaz olyan 2. megszámlálható Hausdorff- tér, amely lokálisan *homeomorf* a 2-dimenziós euklideszi térrel), amely poliéderesen van beágyazva a háromdimenziós térbe.

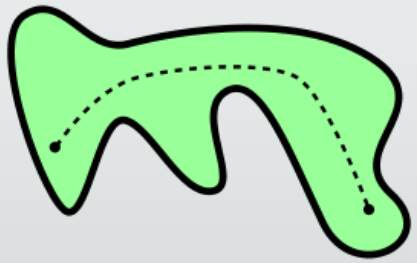
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5c/Klein_bottle.svg/250px-Klein_bottle.svg.png
http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/NormalVector_700.gif
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/29/Sphere_with_chart.svg/220px-Sphere_with_chart.svg.png
https://simomaths.files.wordpress.com/2013/02/compact_spaces.png?w=640
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b8/Path-connected_space.svg/220px-Path-connected_space.svg.png

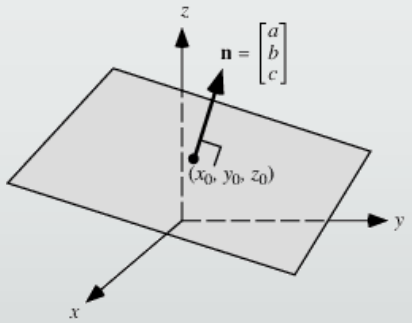
Felületfogalom a topológiában

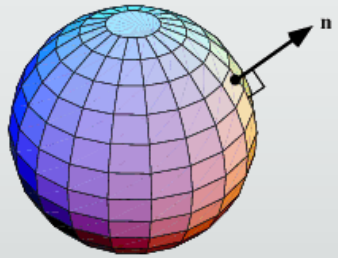


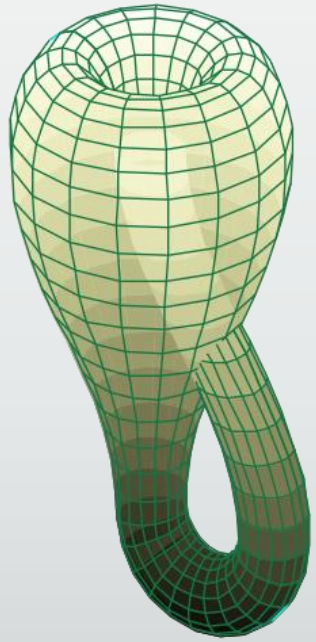
- A kérdések:
  - Mit jelent, hogy közelről minden kis rész két dimenziósnak tűnik?
  - Hány halmazzal fedhető le?
  - Elérhető-e az egyik pontból a másik?
  - Hol van az objektum belseje? A másik oldalon van az azt körülvevő világ. Egyáltalán van az objektumnak belseje?





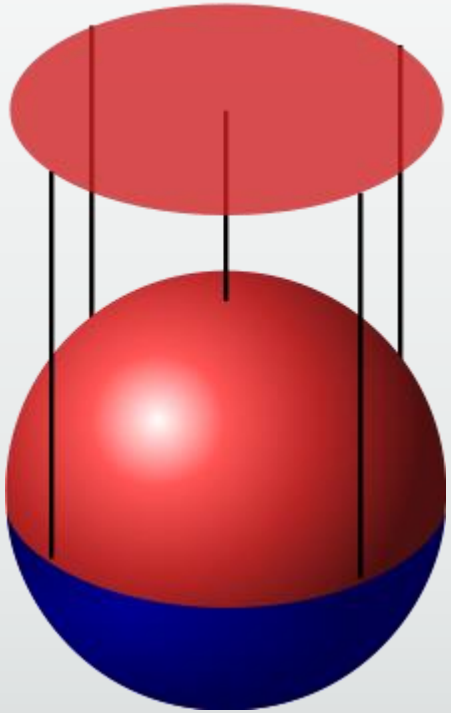


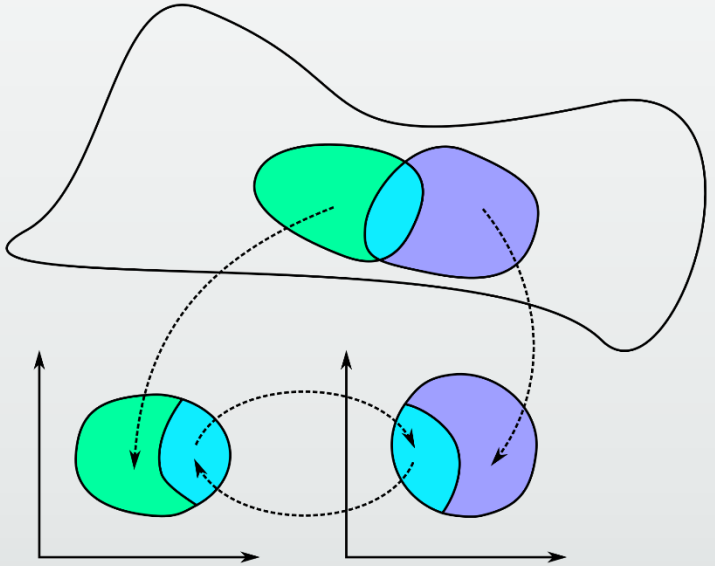


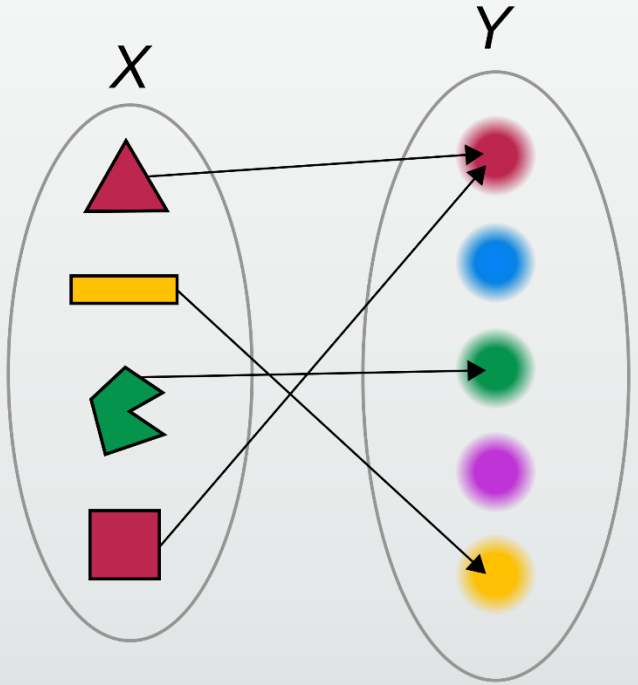


https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/06/Two_coordinate_charts_on_a_manifold.svg/2000px-Two_coordinate_charts_on_a_manifold.svg.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/df/Function_color_example_3.svg/2000px-Function_color_example_3.svg.png

Háromdimenzióból kétdimenzióba…

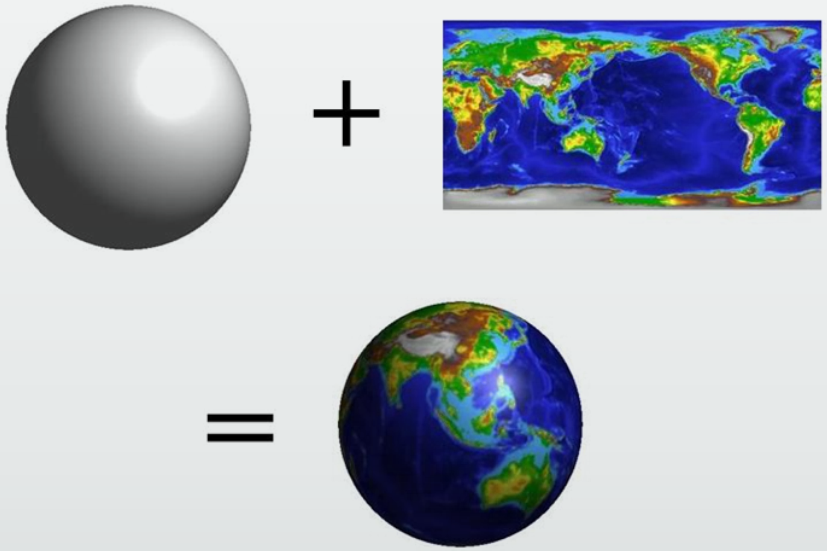


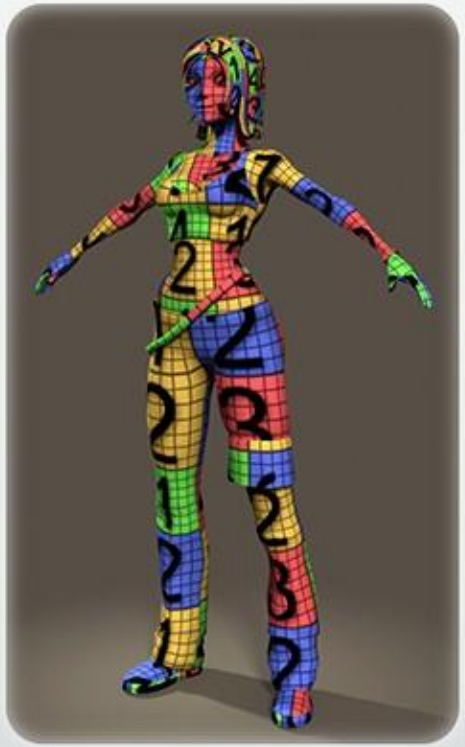


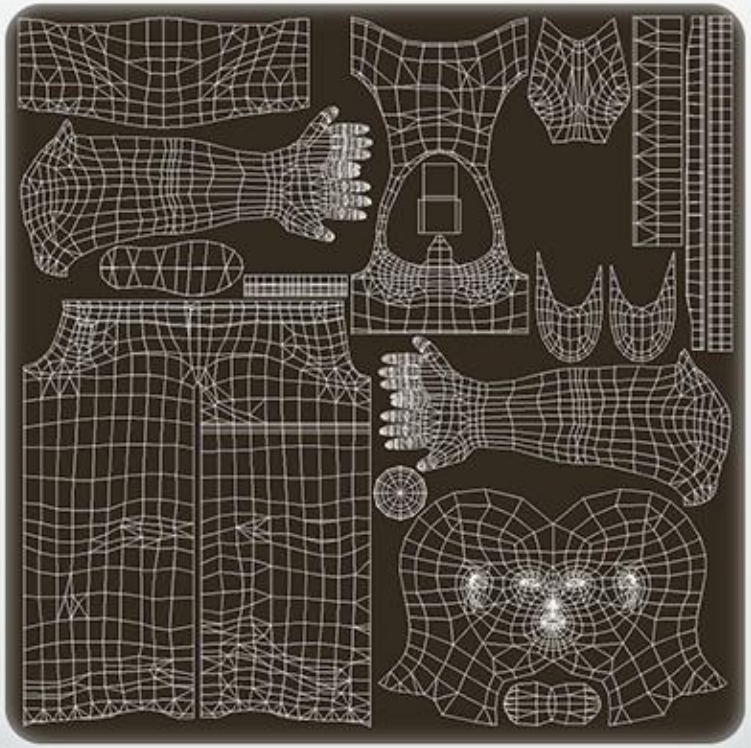


https://slideplayer.com/slide/7371517/
https://medium.com/@sdixon3/uv-mapping-texturing-and-shaders-rigging-and-animation-be9b4ddfod48

Textúra leképezés





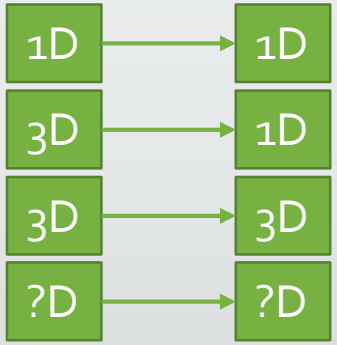


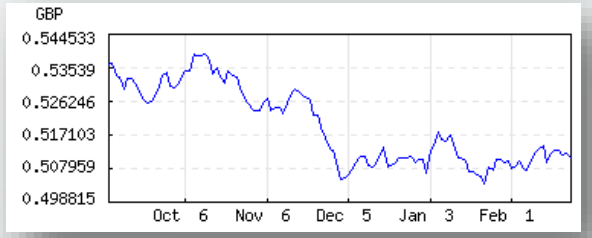
http://cdn.photo-kako.com/sample/heat-map.jpg
http://www.thepokerbank.com/images/exchange-graph.gif
http://web.ncf.ca/ch865/graphics/3DEFldIdenticCharges.jpeg

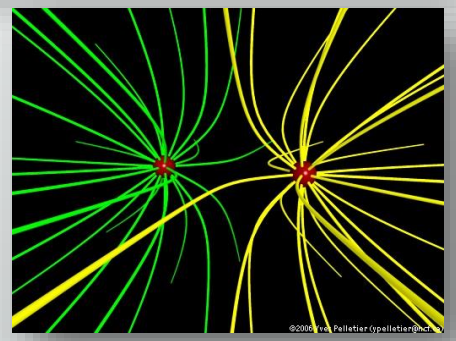
Függvény

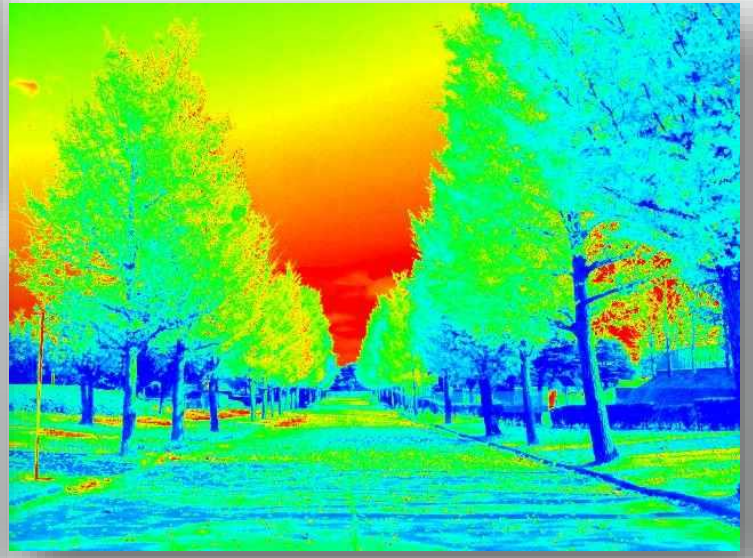
- A függvény a legalapvetőbb fogalma a modern ,,folytonos" matematikának.
- Egyetlen inputból egyetlen output. A grafikonon ,,nincsenek egymás felett pontok".

- Példák:
  - Árfolyam
  - Hőmérséklet
  - Térerősség
  - Meteorológia



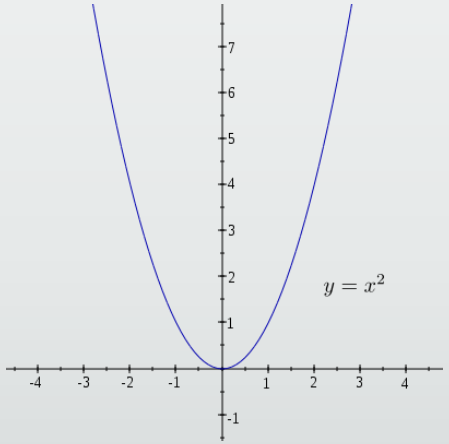


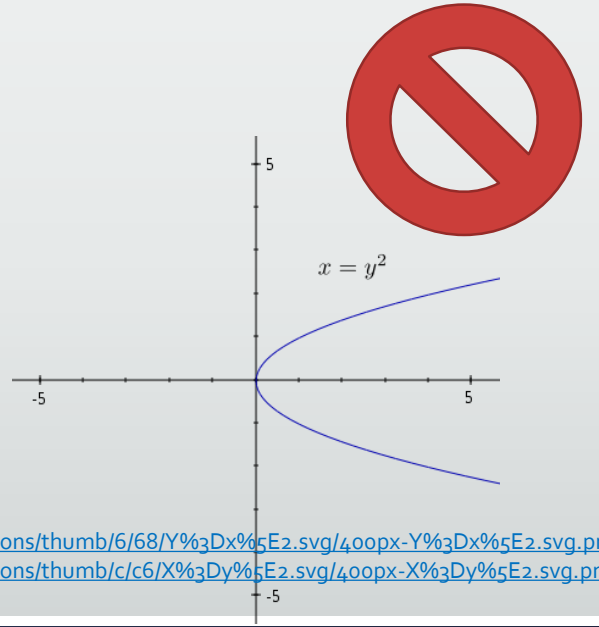




Inverz függvény

- Invertálható függvény?
- Egyetlen outputhoz egyetlen input.

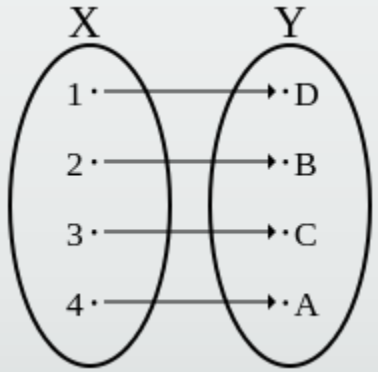


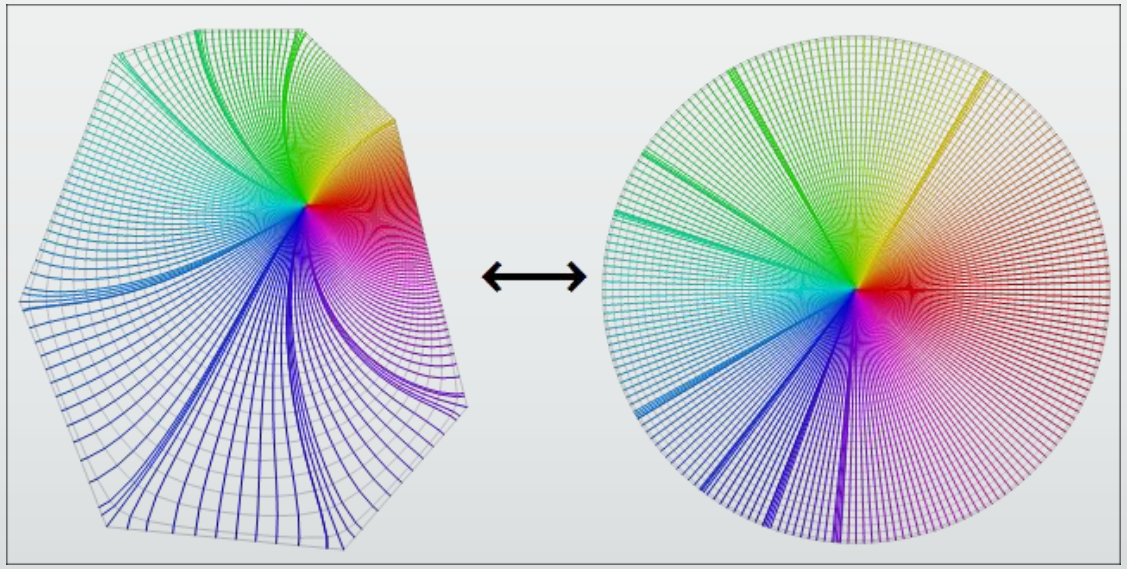


https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/68/Y%3Dx%5E2.svg/400px-Y%3Dx%5E2.svg.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c6/X%3Dy%5E2.svg/400px-X%3Dy%5E2.svg.png

Kölcsönösen egyértelmű leképezések

- Bijekció: Olyan invertálható függvény, melynek output halmaza az értékkészlete.
- Ha az input halmaz = értelmezési tartomány és output halmaz = értékkészlet, akkor miden input elemnek van output elem párja és viszont.

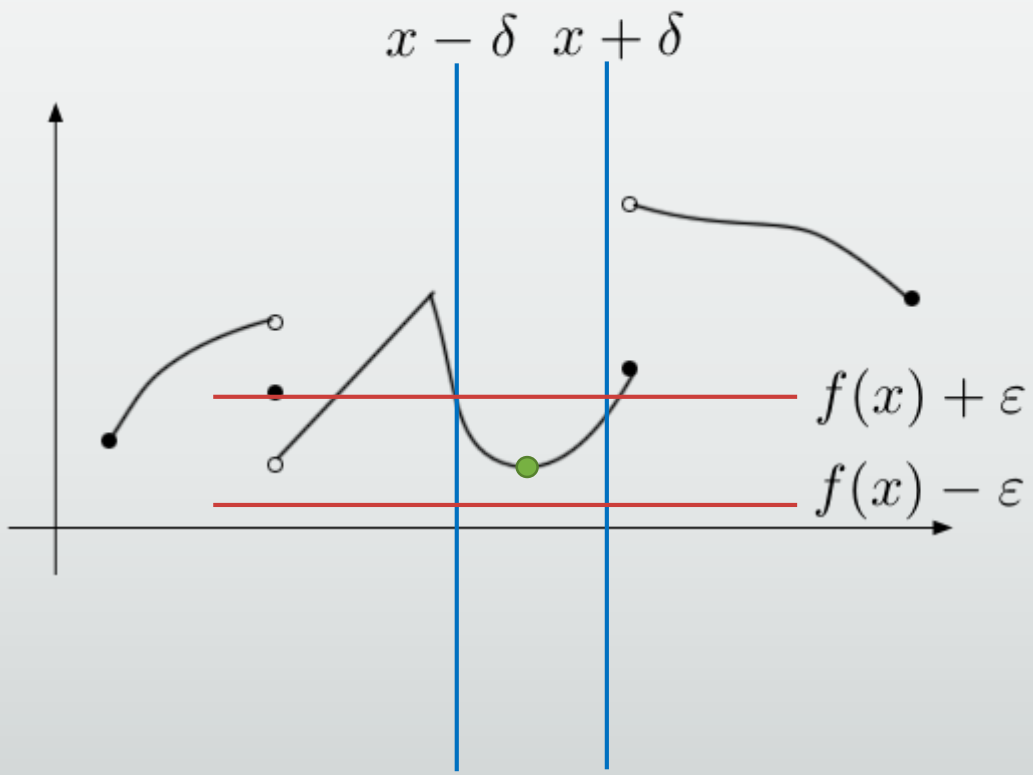


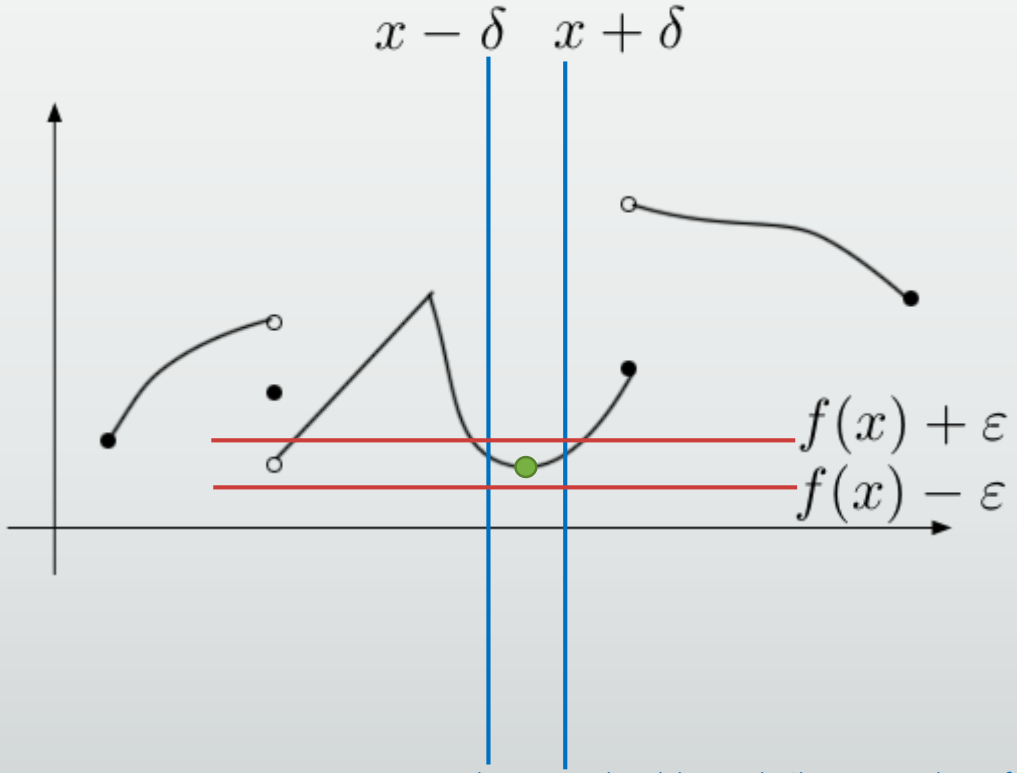


https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a5/Bijection.svg/200px-Bijection.svg.png
http://i.stack.imgur.com/yhcqX.png

Folytonos függvény

- Közeli input értékekhez közeli output értékek.



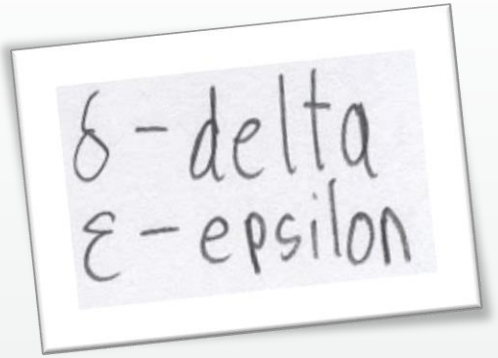


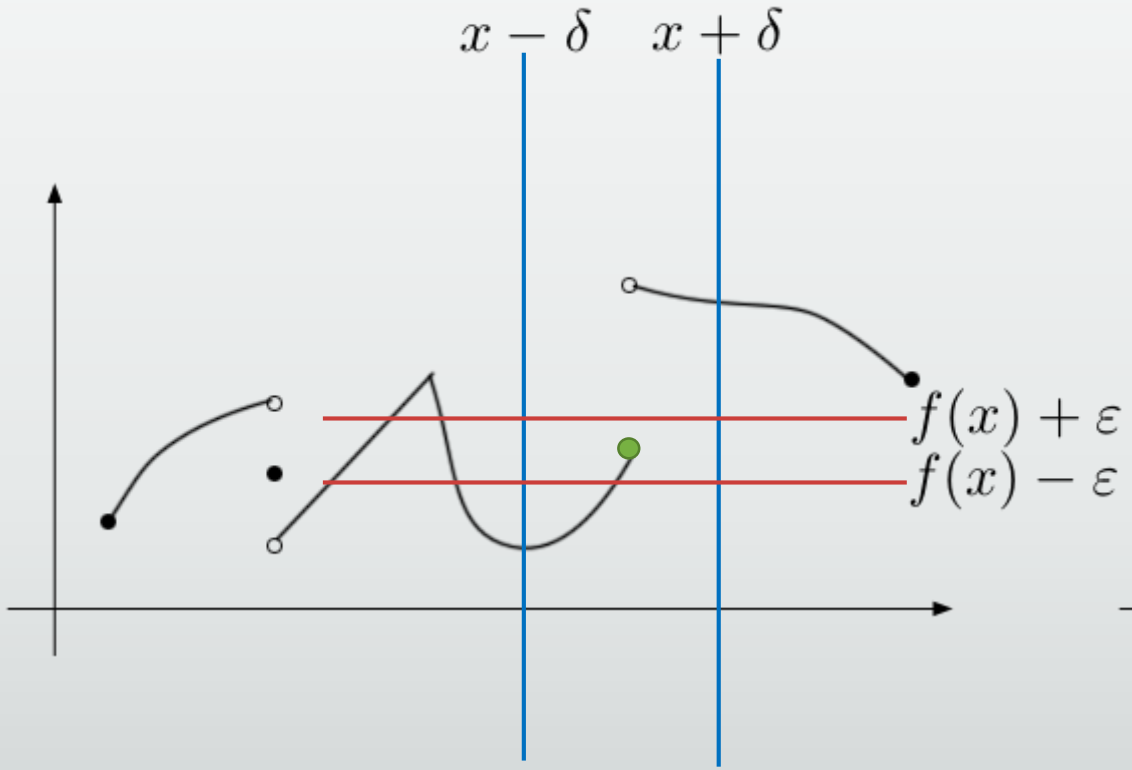
http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/LaplaceDefinition_files/image001.gif

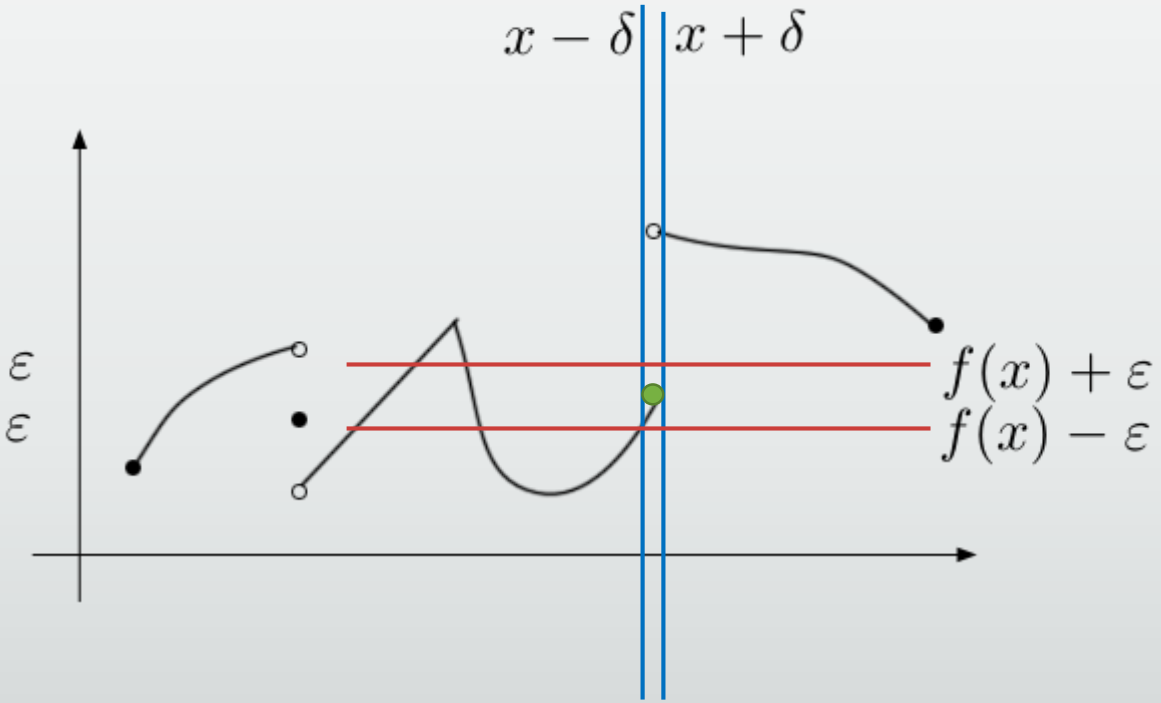
http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/LaplaceDefinition_files/image001.gif
http://3.bp.blogspot.com/-gbTLIilpmnk/Ua_YOP-SNkI/AAAAAAAAAZ8/hsmrez2y354/s200/deltaDef.jpg

Folytonos függvény

- Közeli output értékekhez közeli input értékek.



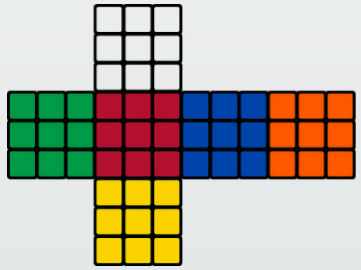


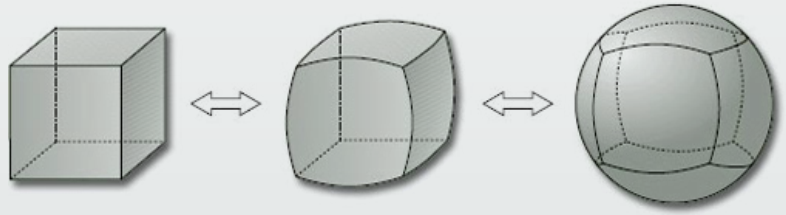


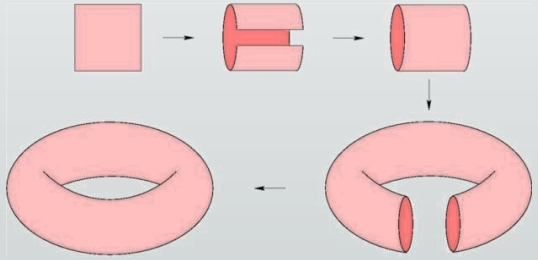
http://aloiziomacedo.weebly.com/uploads/3/8/2/2/38225585/119733806.jpg
http://www.open.edu/openlearn/ocw/pluginfile.php/90214/mod_oucontent/oucontent/751/643f315b/298c3b57/m338_1_039i.jpg
http://i.stack.imgur.com/vlerm.jpg
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/Blue_Trefoil_Knot.png
http://i.imgur.com/49NqgWA.jpg

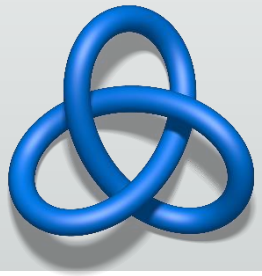
Homeomorfizmus

- *homoiosz*: hasonló + *morfé*: alak
- A homeomorfizmus folytonos bijekció, melynek az inverze is folytonos.
- Az egyik felület minden pontjához egyértelműen hozzárendeljük a másik felület egy pontját.
- Nincs szakítás
- Nincs ragasztás
- Homeomorfizmus = Deformáció
- Topológiai ekvivalencia









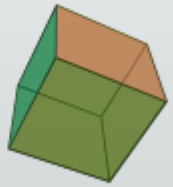
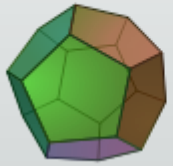
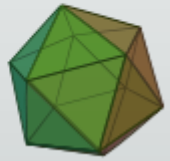
https://simomaths.files.wordpress.com/2013/11/platonic_solids.png

Euler-karakterisztika

- *V*: pontok száma
- *E*: élek száma
- *F*: lapok száma

$$\chi = V - E + F$$

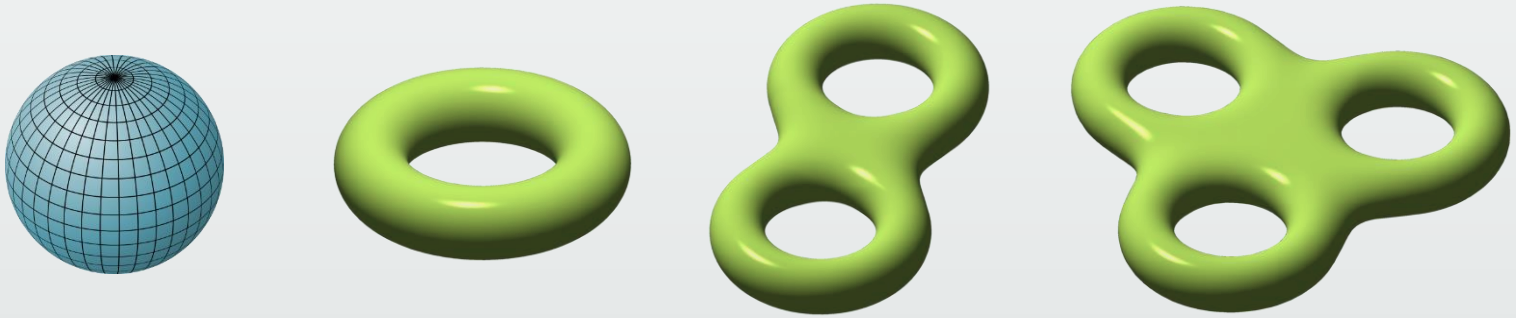
- Számítógépes grafikában *V* és *F* adott, *E* könnyen kiszámolható.

Tetrahedron *V*=4, *E*=6, *F*=4	Cube or hexahedron *V*=8, *E*=12, *F*=6	Octahedron *V*=6, *E*=12, *F*=8	Dodecahedron *V*=12, *E*=30, *F*=20	Icosahedron *V*=20, *E*=30, *F*=12
				

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/70/Sphere_filled_blue.svg/400px-Sphere_filled_blue.svg.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9f/Torus_illustration.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bc/Double_torus_illustration.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/fo/Triple_torus_illustration.png/1920px-Triple_torus_illustration.png

Felületek osztályozási tétele

- Egy topológiai értelemben vett felület Euler-karakterisztikája
  - 2, ha gömbbé deformálható
  - 0, ha tórusszá deformálható
  - 2-2n, ha n db tórusz „összeragasztásából" kapott felületté deformálható



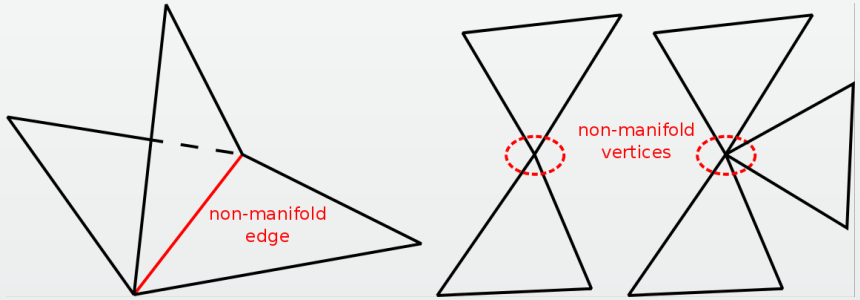
- A felületeket tehát (részlegesen) meghatározza a testen átmenő lévő lyukak száma!
- Ha a lyukak száma g (génusz), akkor:

$$\chi = V - E + F = 2 - 2g$$

http://pointclouds.org/blog/_images/non_manifold.png

CG és topológiai felület

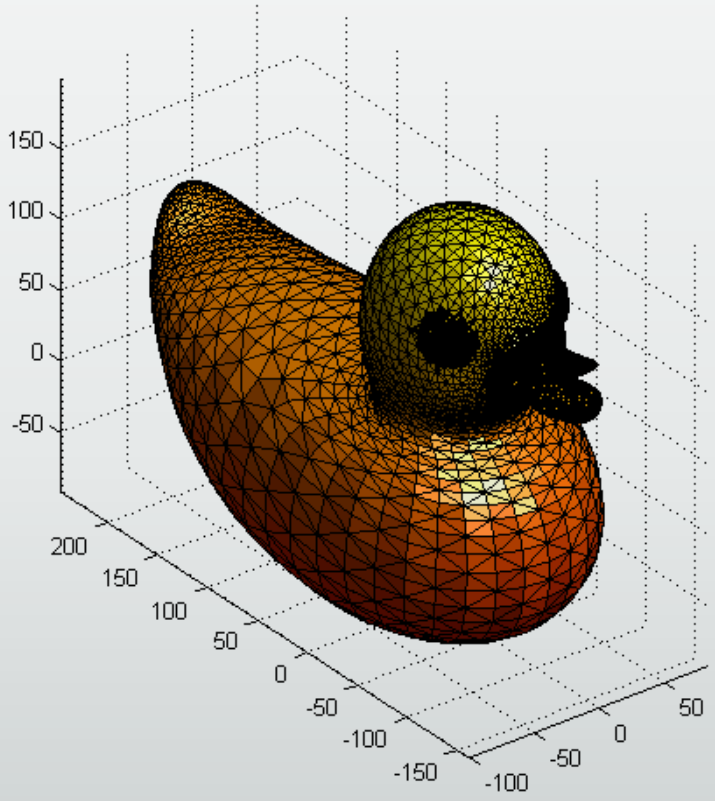
- Mi kell ahhoz, hogy egy CG felület topológiai értelemben is felület legyen?
  - Legyen lokálisan két dimenziós
    - Lapok belseje: triviális
    - Élek: minden élhez legfeljebb két háromszög csatlakozzon
    - Pontok: a pontokhoz csatlakozó lapok alkossanak „legyezőt”



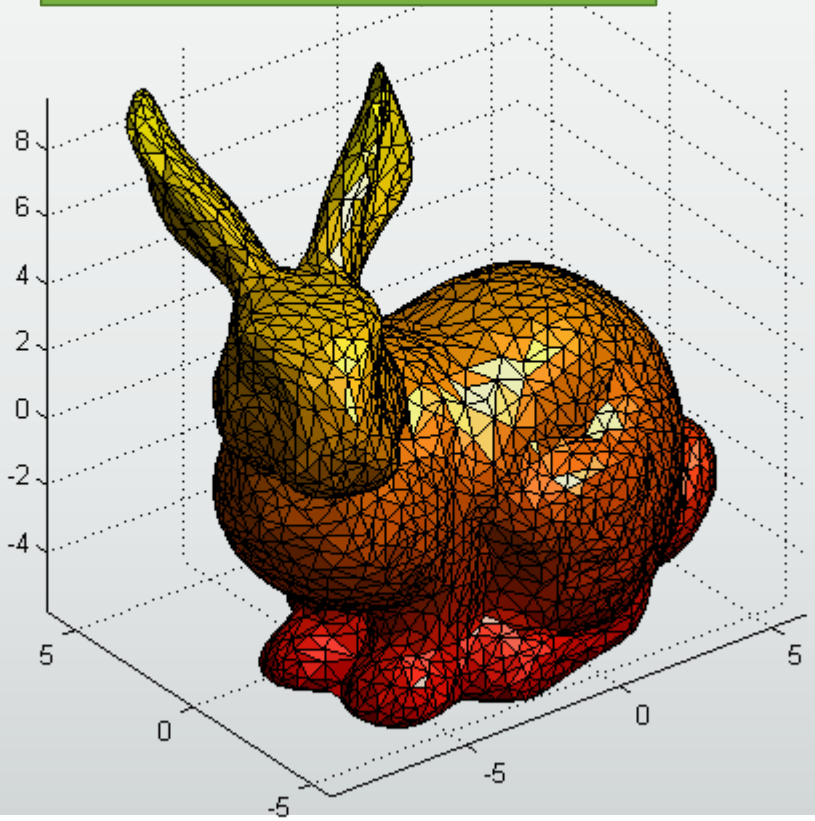
  - Legyen összefüggő: az A és B ponthoz létezzen egymással szomszédos pontok sorozata, melynek első eleme A, utolsó pedig B
  - Legyen kompakt: Minden élhez pontosan két háromszög csatlakozzon
  - Legyen irányítható: szomszédos háromszögek normálisai legyenek konzisztensek
- Ha minden teljesül, használhatjuk a felületek osztályozási tételét.
- De ebből még nem következik, hogy a felület „fizikai”…

A világ alakja

V-E+F=6390 - 19164 + 12776 = 2

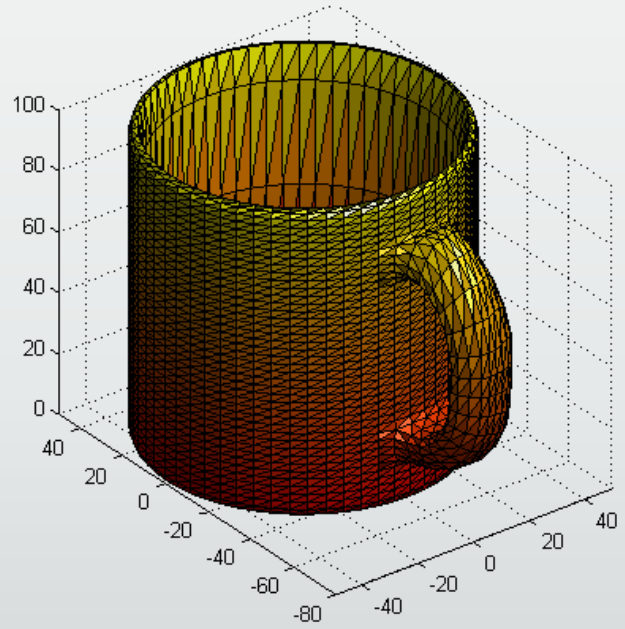


V-E+F= 2503 - 7503 + 5002 = 2

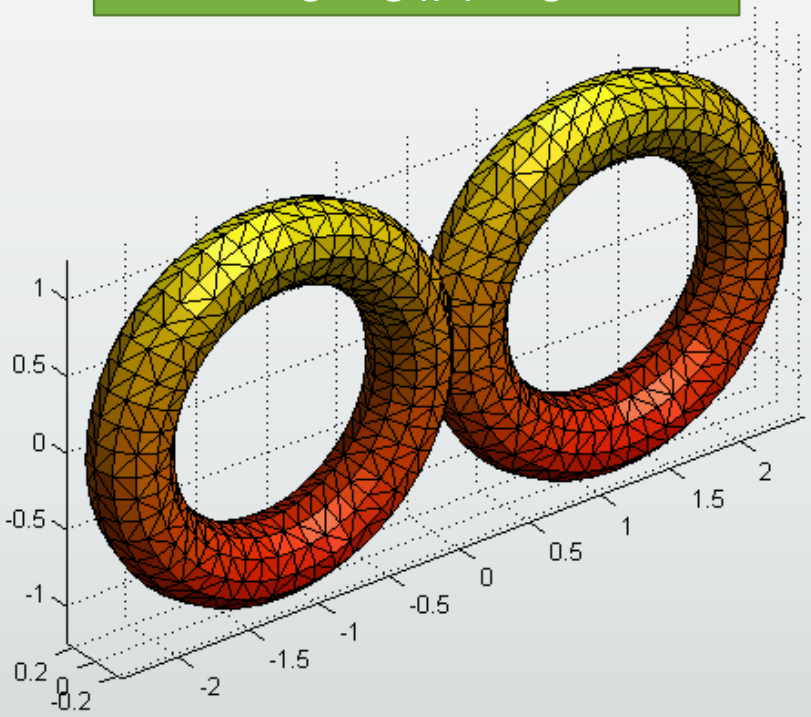


A világ alakja

V-E+F=5084 - 15252 + 10168 = 0



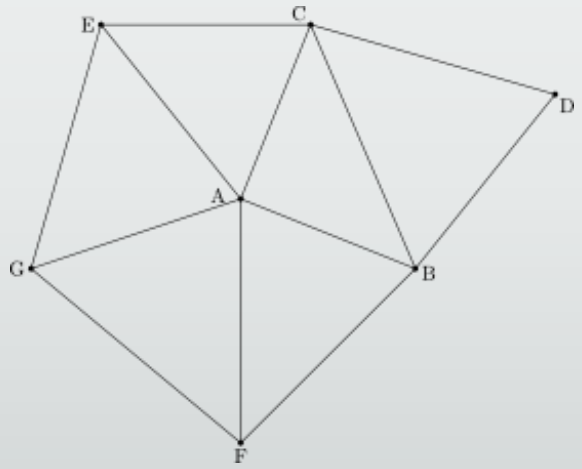
V-E+F=1156 - 3474 + 2316 = -2



https://s-media-cache-ako.pinimg.com/736x/53/fc/16/53fc1651922cb7d548fd85782795f9a7.jpg
http://jcae.sourceforge.net/amibe-doc/org/jcae/mesh/amibe/ds/doc-files/Mesh-1.png

Érdekesség: Gráfok

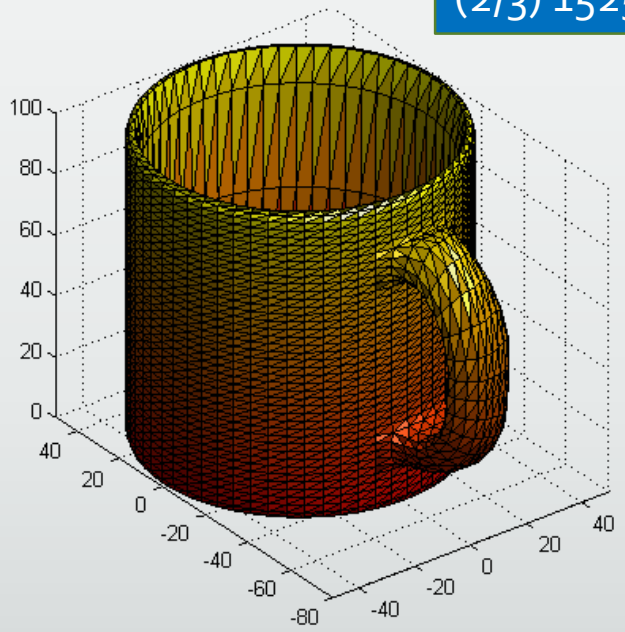
- Gráf: csúcsok és információ a csúcsok közötti kapcsolatokról.
- Tegyük fel, hogy a gráfot egy topológiai értelemben felületnek tekintethető vertex- és indexpuffer határozza meg (ez kizárólag CG).
- N_k: azon csúcsok száma, melyekhez pontosan *k* db él csatlakozik.
- $V = N_3 + N_4 + N_5 + \cdots$
- $E = \frac{1}{2}(3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + \cdots)$
- $F = \frac{1}{3}(3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + \cdots)$
- $F = \frac{2}{3}E$



Élek és lapok száma

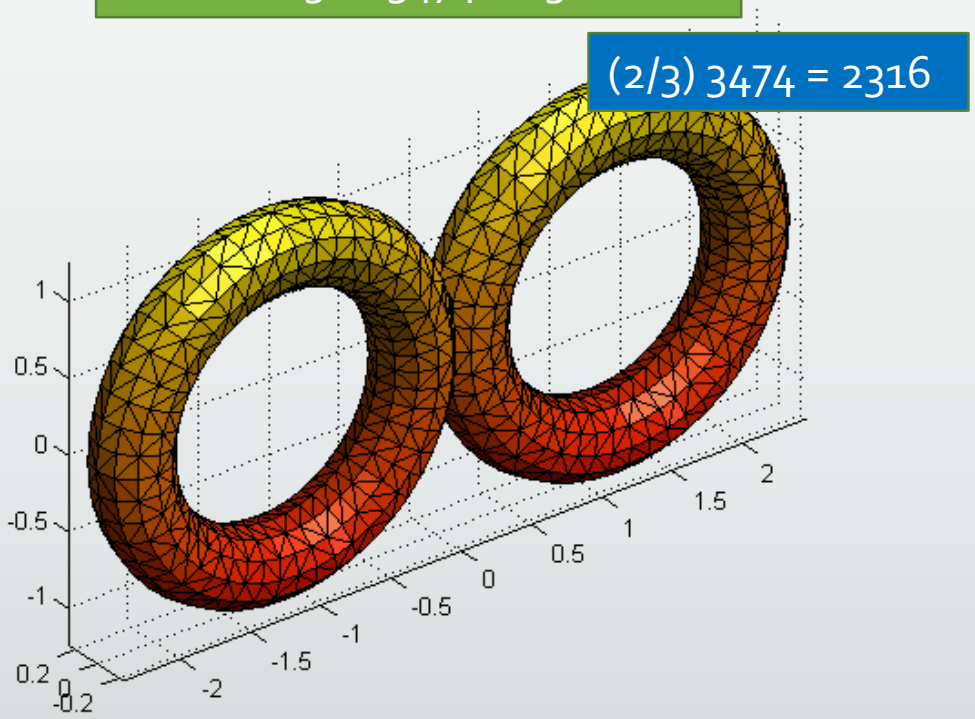
V-E+F=5084 - 15252 + 10168 = 0

(2/3) 15252 = 10168



V-E+F=1156 - 3474 + 2316 = -2

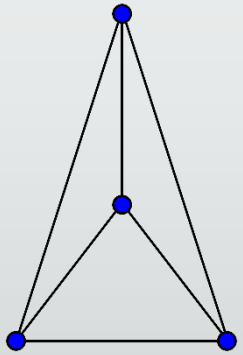
(2/3) 3474 = 2316

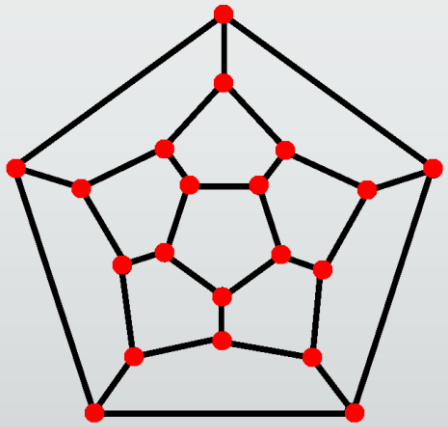


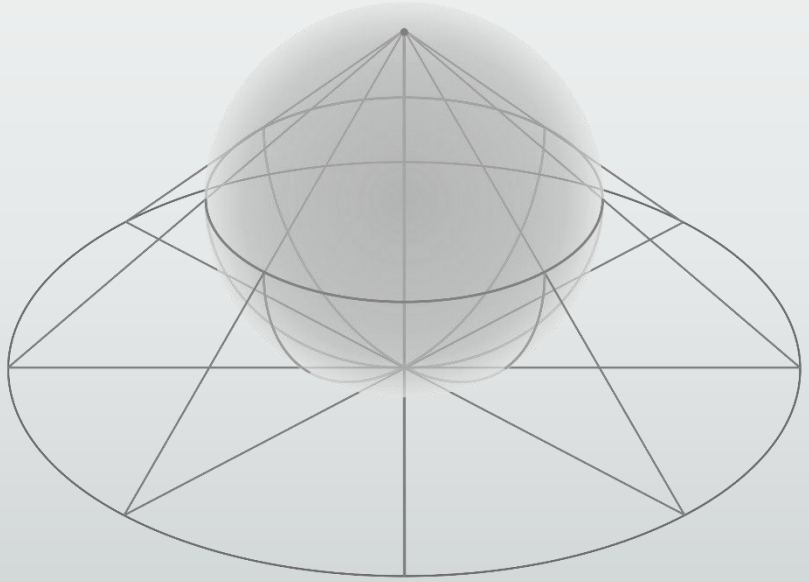
https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph#/media/File:CGK4PLN.svg
https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph#/media/File:Dodecahedron_schlegel_diagram.png
https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection#/media/File:Stereographic_projection_in_3D.svg

Síkgráfok

- A felületekhez hasonlóan definiálhatók a lapok is (élhurkok által bezárt síkrészek).
- Hasonlóan számolható az Euler-karakterisztika.
- Ha egy gráf síkbarajzolható, és síkba rajzoljuk egymást nem metsző élekkel, akkor annak Euler-karakterisztikája 2! A lapok számába bele kell számolni a külső régiót is!
- A kilyukasztott gömb kiteríthető síkba!







https://i.ytimg.com/vi/jkoo_-IQeao/hqdefault.jpg
http://static.giantbomb.com/uploads/scale_small/0/5768/538199-tomthecat.jpg
https://img.grouponcdn.com/deal/dfwpvKGQkhU2vbq92buD/gu-2048x1229.jpg/v1/c700x420.jpg
http://io.wp.com/apassionandapassport.com/wp-content/uploads/2016/01/scottsdale-hot-air-balloon.jpg?resize=750%2C500

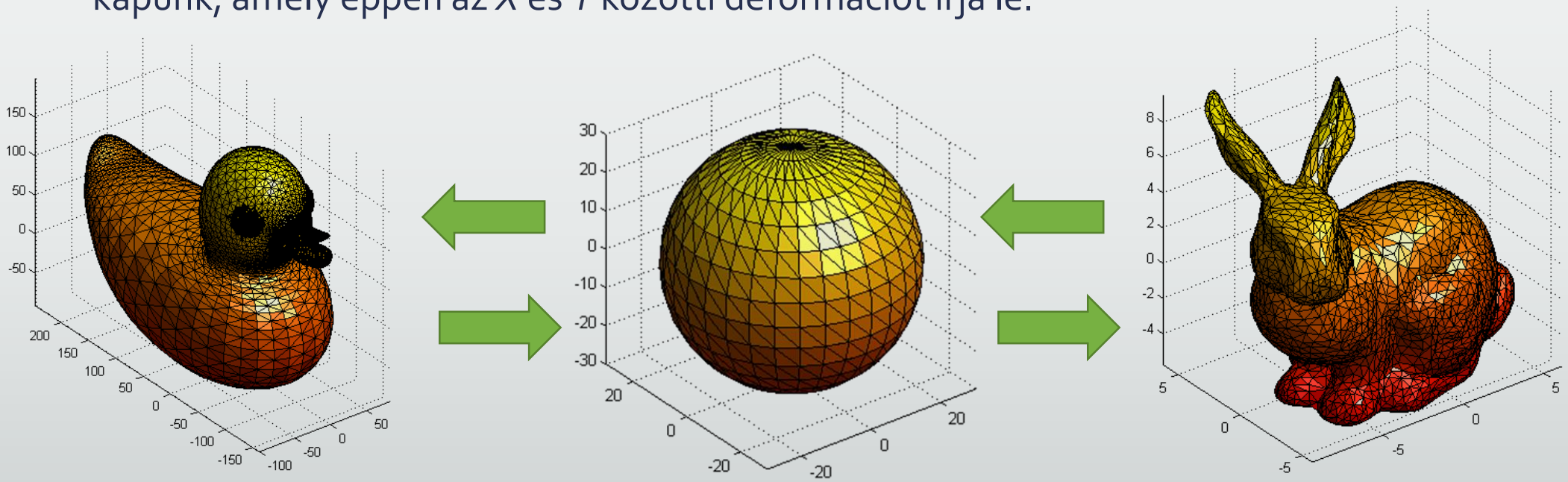
Létezés és konstrukció

- Könnyen ellenőrizhető tehát, hogy két felület között létezik deformáció, ami ez egyiket a másikba képezi.
- Csak a létezést tudjuk garantálni, a leképezés ismeretlen.
- Pl: Deformáljuk gömbbé azt, amiről tudjuk, hogy gömbbé alakítható!

https://i.ytimg.com/vi/jkoo_-IQeao/hqdefault.jpg
http://static.giantbomb.com/uploads/scale_small/0/5768/538199-tomthecat.jpg
https://img.grouponcdn.com/deal/dfwpvKGQkhU2vbq92buD/gu-2048x1229.jpg/v1/c700x420.jpg
http://io.wp.com/apassionandapassport.com/wp-content/uploads/2016/01/scottsdale-hot-air-balloon.jpg?resize=750%2C500

Egymásba alakítható felületek

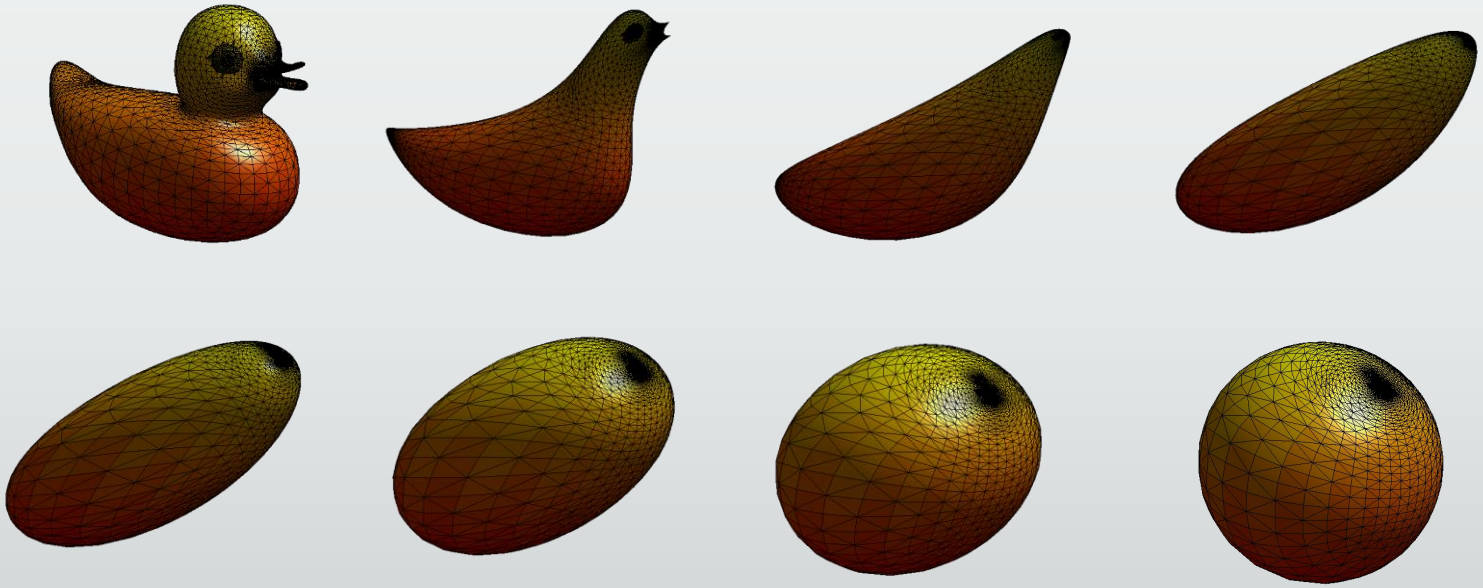
- Ha *X* és *Y* felület is ekvivalens a gömbbel, kereshetünk két olyan *f* és *g* leképezést, amelyek *X*-et és *Y*-t gömbbé deformálják.
- Ekkor pl. *g* inverze (amely létezik) a gömböt deformálja az *Y* felületté, azaz az *f* és *g* inverzének egymás után történő végrehajtásával (kompozíció) egy olyan deformációt kapunk, amely éppen az *X* és *Y* közötti deformációt írja le.



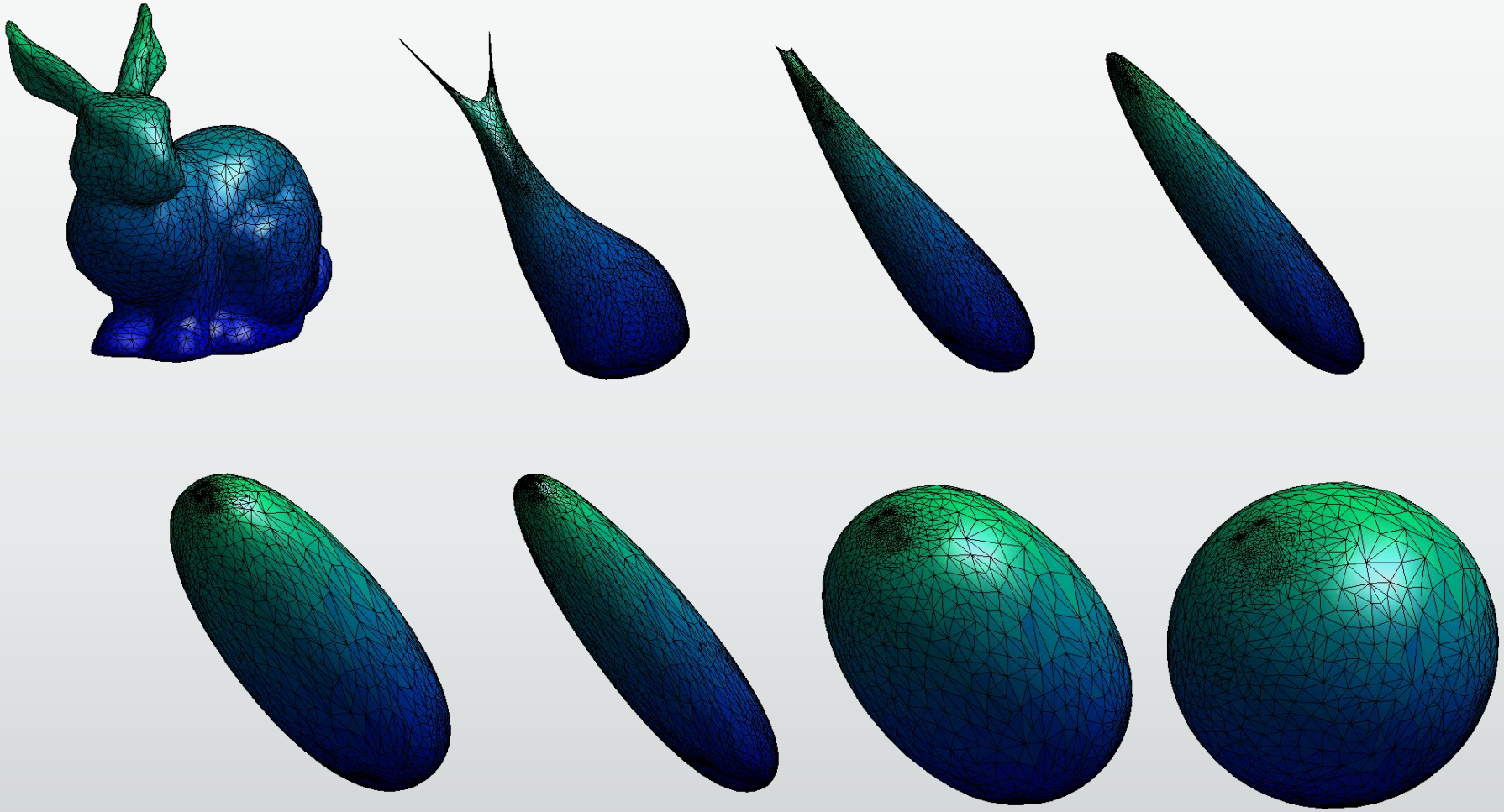
https://en.wikipedia.org/wiki/Curvature#/media/File:Osculating_circle.svg

Algoritmus lépésenként…

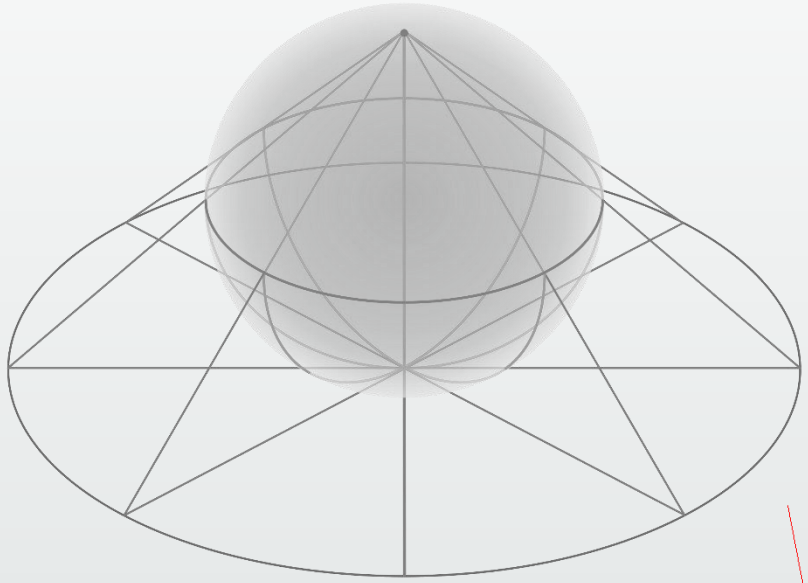
- Mozgassuk a felület pontjait a normálvektorok irányába olyan sebességgel, ami arányos a pontbeli *görbülettel*!
- Minden lépésben helyezzük vissza a testet az origóba, skálázzuk vissza, számljuk újra a normálisokat, görbületeket, stb…

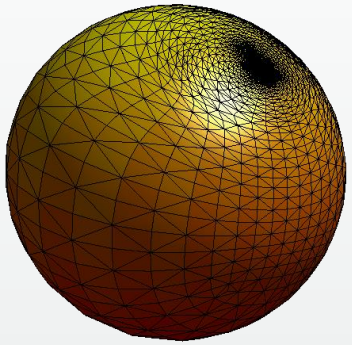


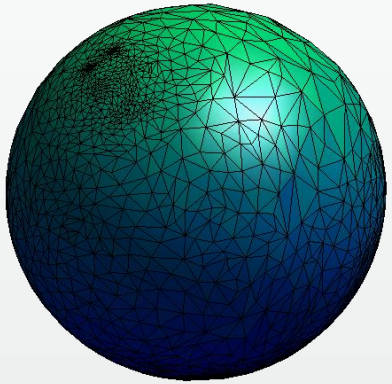
1. Alakítsuk gömbbé az alakzatokat!

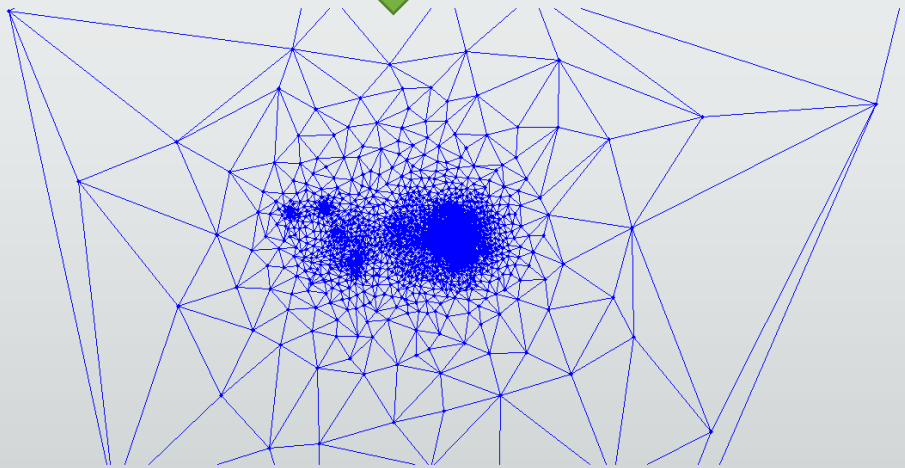


2. Terítsük síkba a gömböket!

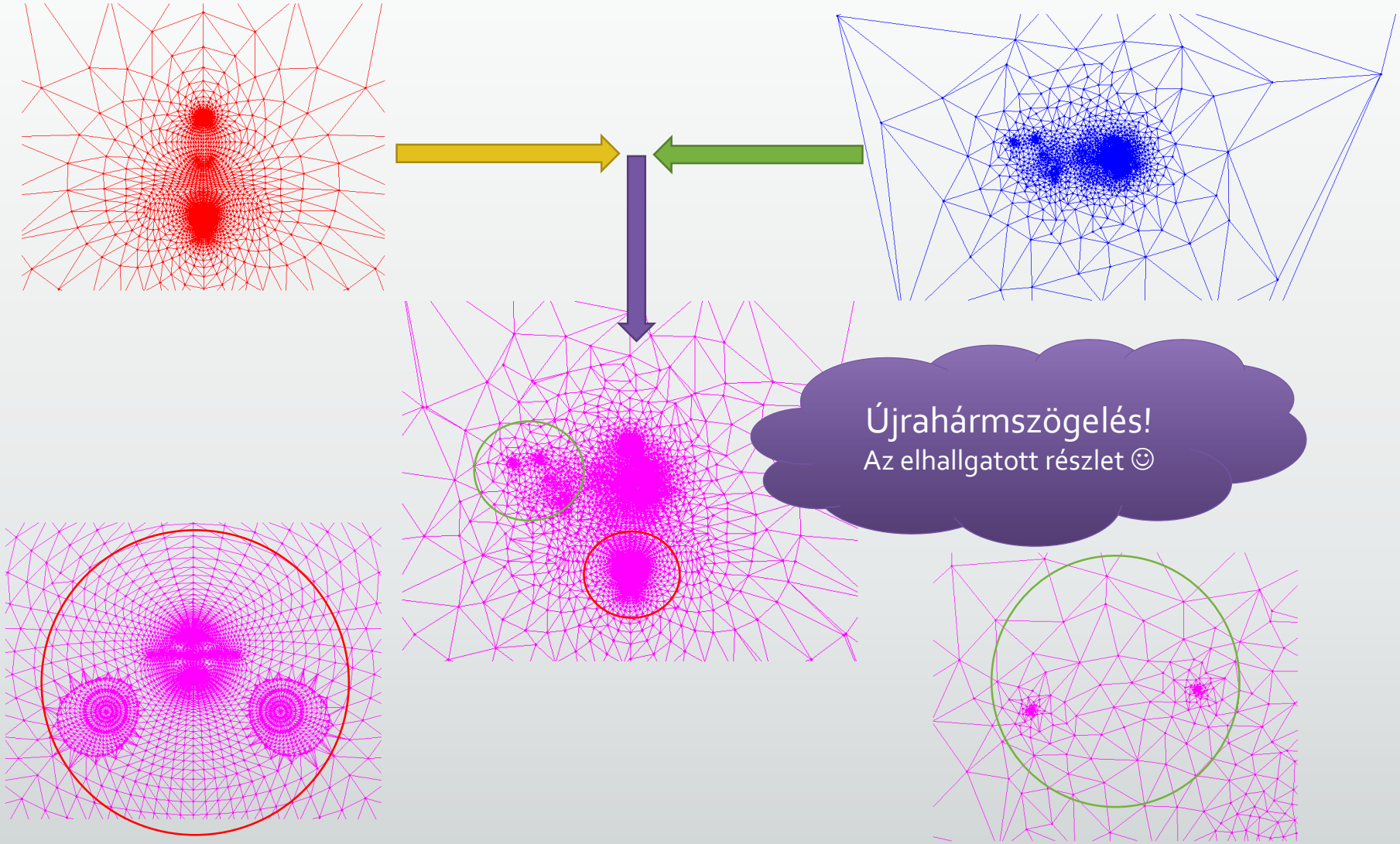




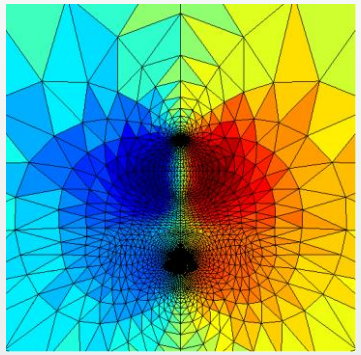
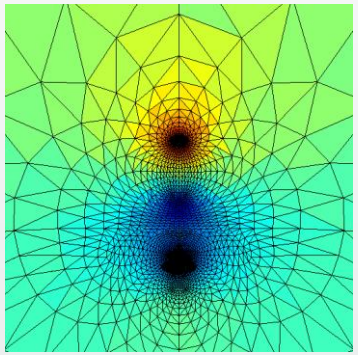
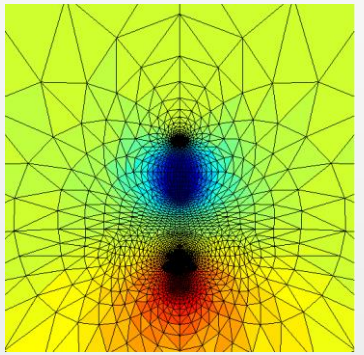
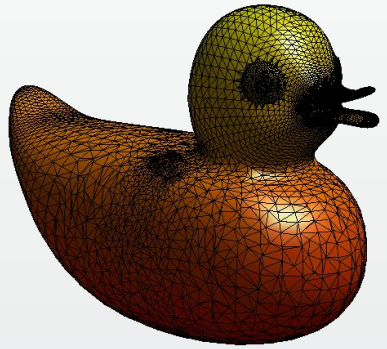
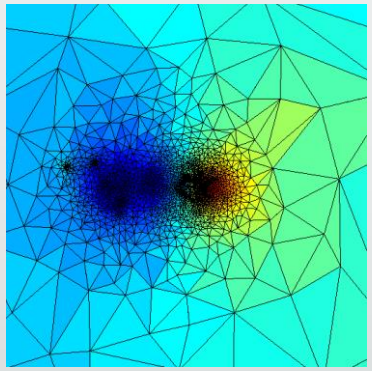
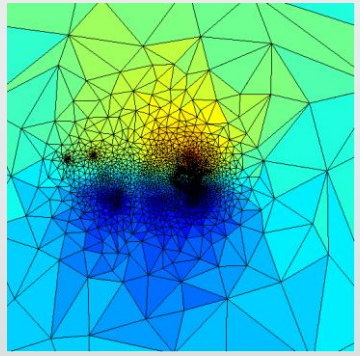
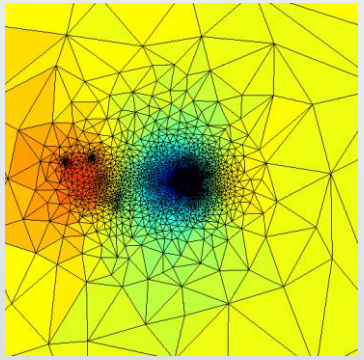
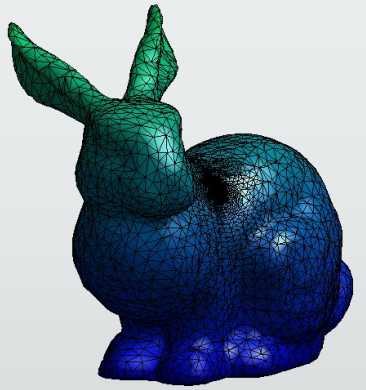




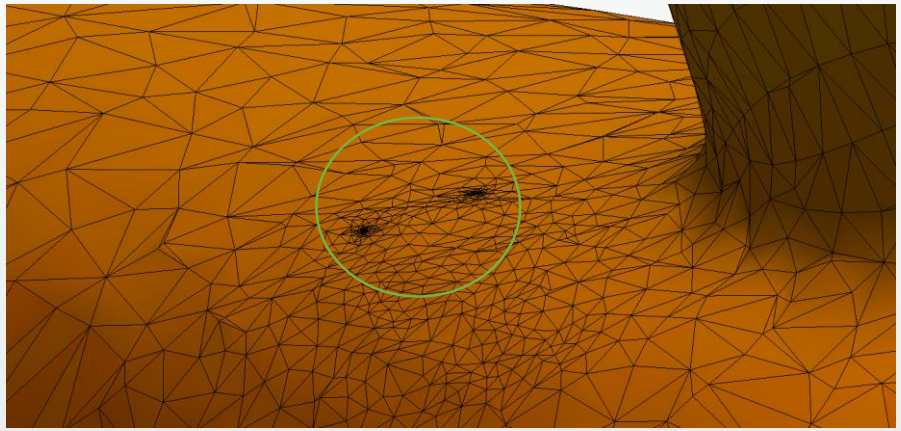
3. Egyesítsük a térképeket!

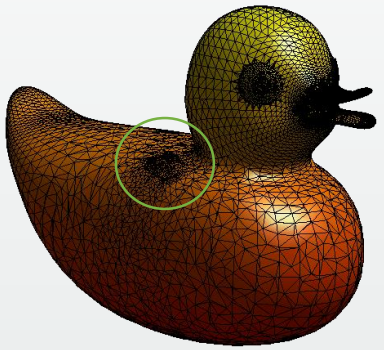


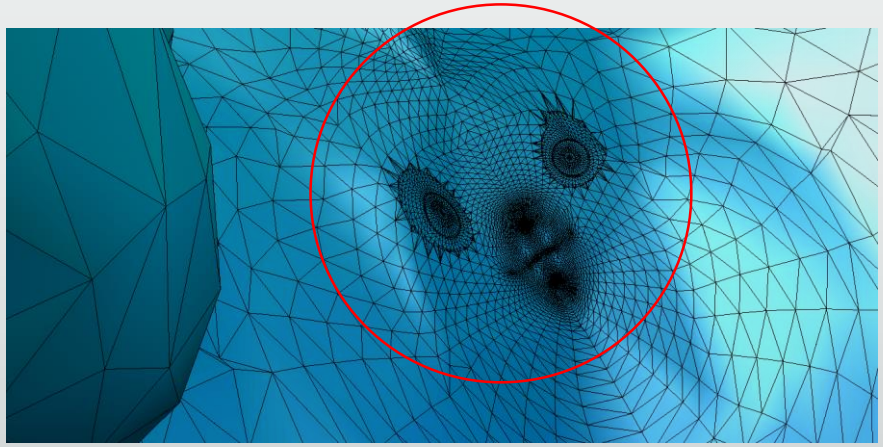
4. Térjünk vissza a 3D térbe!

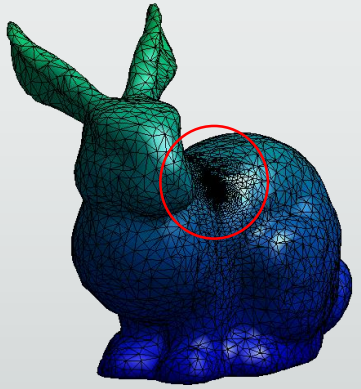









Szuperháló

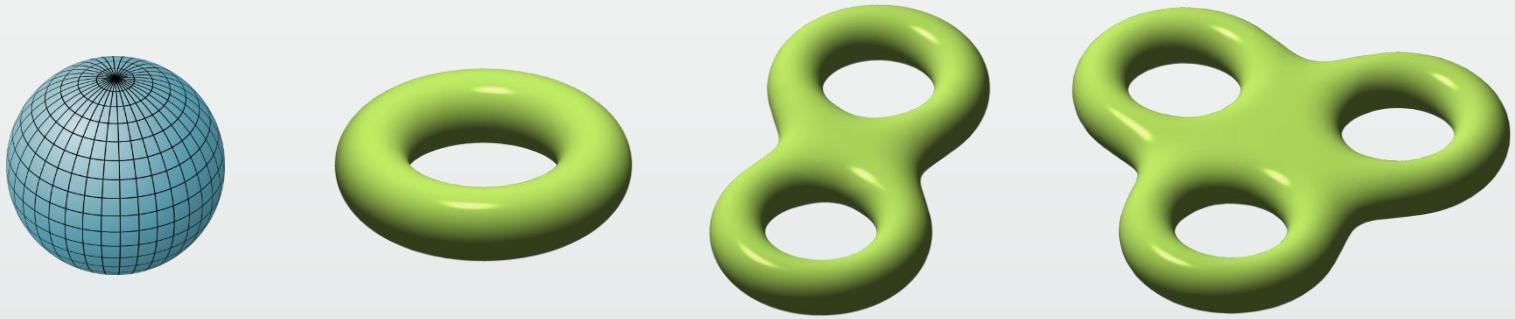








Alakváltás

- Csúcsok mozgatása a kezdeti állapotból a végállapotba.

Köszönöm a figyelmet!